Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Спектральная теория и дифференциальные уравнения

Конференция, посвященная
100-летию Б. М. Левитана

Москва, 23–27 июня 2014 г.

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва, 2014

УДК 517.9 (063)
ББК

Международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвящённая 100-летию Б. М. Левитана: Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2014. — 158 с.

Организационный и программный комитет

Конференция поддержана:

Российским фондом фундаментальных исследований
Фондом «Династия»
Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова

ISBN

Multiple orthogonal polynomials and Schrodinger operators on the d-lattice

A. I. Aptekarev (Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS)

Let $\mu(x) := (\mu_1(x), \ldots, \mu_d(x))$ be a vector of positive measures. For a given vector (multiindex) of positive integer coordinates $n = (n_1, \ldots, n_d)$ we consider a polynomial $P_n(x)$ of degree $|n| := n_1 + \ldots + n_p$, which satisfies n_j orthogonality relations with respect to the measure μ_j, $j = 1, \ldots, d$. Such polynomials always exist and they are called multiple orthogonal polynomials. For $p = 1$ we have usual orthogonal polynomials, which satisfy to the three term recurrence relations. The coefficients of these relations form the three diagonal Jacobi matrix, which is also called one dimensional discrete Schrodinger operator and the measure of orthogonality serves as a spectral measure for this operator. For $p > 1$ the multiple orthogonal polynomials possess a $d + 1$ recurrence relations, which relate polynomials with neighboring multiindices. We shall discuss a multiple orthogonal polynomials approach to the spectral theory of $d > 1$ discrete Schrodinger operator.

The talk is based on a joint work with Maxim Derevyagin and Walter Van Assche.

Estimate of the Decay Exponent of an Operator Semigroup Associated with a Second-Order Linear Differential Equation

N. V. Artamonov (Moscow State Insitute of International Relations (University))

In Hilbert space H we consider a second-order linear differential equation

$$u''(t) + Du'(t) + Au(t) = 0$$

and related quadric pensil $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda D + A$ with self-adjoint positive definite operator A. By H_s denote a collection of Hilbert spaces generated by operator $A^{1/2}$, $\|\cdot\|_s$ is a norm on H_s. We will assume that D is a bounded operator acting from H_1 to H_{-1} and

$$\inf_{x \in H_1, x \neq 0} \frac{\mathrm{Re}(Dx, x)_{-1,1}}{\|x\|_1^2} = \delta > 0.$$

(here $(\cdot, \cdot)_{-1,1}$ is a duality pairing on $H_{-1} \times H_1$). The second-order differential equation can be linearized as a system $w'(t) = \mathcal{T} w(t)$ in “energy” space $H \times H_1$, where

$$w(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} -D & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

We estimate an exponential decay rate for a semigroup generated by operator $\mathcal{T}$ in the space $H \times H_1$. We also obtained localization of the spectrum of the pencil $L(\lambda)$:

$$\sigma(L) = \sigma(\mathcal{T}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\lambda \leqslant -\omega, |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant \kappa(b)|\mathrm{Re}\lambda| + b\}$$

for some positive ω and for all $b > 0$.

Harmonic and spectral analysis of bounded semigroups of operators

A. G. Baskakov (Voronezh State University)

Let $\mathcal{X}$ be complex Banach space and $\mathrm{End}\,\mathcal{X}$ be a Banach algebra of bounded linear operators acting on $\mathcal{X}$.

By $C_b = C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ denote the Banach space of bounded continuous functions on $\mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$. By $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ denote the subspace of $C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ of uniform continuous functions and let $C_0 = C_0(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ be subspace of $C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ the vanishing at infinity functions.

Let $(S(\tau)x)(t) = x(t + \tau)$, $t \in \mathbb{J}$, $x \in C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$, be a semigroup (group) of shift operators.

Definition 1. The function $x \in C_{b,u}$ is *slowly varying at infinity* if $S(\tau)x - x \in C_0$.

By $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ denote the space of slowly varying at infinity functions. For example, the functions $x_1(t) = \sin\ln(1 + |t|)$ and $x_2(t) = \sin\sqrt{|t|}$, $\quad t \in \mathbb{J}$ are slowly varying at infinity functions.

Definition 2. The number $\omega \in \mathbb{J}$ is called ε -period at infinity of $x \in C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ if there exist a compact set $K = K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ such that

$$\sup_{t \in \mathbb{J} \setminus K_\varepsilon} \left\| x(t + \omega) - x(t) \right\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon.$$

By $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ denote a set of ε -periods at infinity of function x.

Definition 3. A function $x \in \mathbb{C}_{\mathrm{b,u}}$ is called *almost periodic at the infinity* (in Bohr sense) if for each $\varepsilon > 0$ there exists $l = l(\varepsilon) > 0$ such that each interval of length l includes at least one point of $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Definition 4. A function $x \in \mathrm{C_b}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ is called *almost periodic at infinity* if for each $\varepsilon > 0$ there exist numbers $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ function $x_0 \in \mathrm{C}_0(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ and slowly varying at infinity functions $x_1, \dots, x_m \in \mathrm{C}_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ such that

$$\lim_{\substack{|t| \to \infty \\ t \in \mathbb{J}}} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^{m} x_k(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} \right\| = 0.$$

We obtain the following results.

Theorem 1. *Let $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ be bounded strongly continuous semigroup of operators with generator A. Spectrum of A has property*

$$\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}.$$

Then semigroup T can be represented as

$$T(t) = \sum_{k=1}^{m} B_k(t) \mathrm{e}^{i\lambda_k t} + B_0(t), \quad t \geqslant 0,$$

where functions $B_k : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ are continuous in uniform operator topology.

Functions B_k have the following properties:

1) Operators $B_k(t),\ t_0 \leqslant t\ \ 0 \leqslant k \leqslant m$ belong minimal closed subalgebra from $\operatorname{End}\mathcal{X}$ generated by operators $T(t),\ \ t \geqslant t_0$.

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \|B_0(t)\| = 0$.

3) Functions $B_k,\ \ 1 \leqslant k \leqslant m$ are slowly varying at infinity and can be extended on $\mathbb{C}$ to entire functions of exponential type with $\lim\limits_{t\to\infty} \|B_k'(t)\| = 0$.

4) $\lim\limits_{t\to\infty} \|T(t)B_k(t) - \mathrm{e}^{i\lambda_k t} B_k(t)\| = 0$.

5) $\lim\limits_{t\to\infty} \|B_k(t)B_p(t)\| = 0,\ \ k \neq p$.

Let operator $T \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ has bounded powers (i.e. $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|T^n\| < \infty$) and

$$\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_m\},$$

where $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ is unit circle.

Theorem 2. *The operator T has the following asymptotic representation*

$$T^n = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^n A_k(n), \quad n \geqslant 1,$$

where $A_k : \mathbb{Z}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{X}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, have the following properties:

1) the operators $A_k(n)$, $n \geqslant 1$, $i \leqslant k \leqslant m$, belong minimal closed subalgebra from $\operatorname{End}\mathcal{X}$ generating T;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \|TA_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_k(n)A_p(n)\| = 0$ for $k \neq p$, $1 \leqslant k,\ p \leqslant m$.

Analogical representation is obtained for C_0-semigroups.

Corollary (Y. Katznelson, L. Tzafriri). *The following property*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^{n+1} - T^n\| = 0$$

holds iff $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$.

Differential operators with singular interactions on manifolds

J. Behrndt (TU Graz)
P. Exner (Czech Technical University)
V. Lotoreichik (TU Graz)

In this talk we discuss spectral properties of Schrödinger operators with δ and δ' potentials supported on manifolds of codimension one. We illustrate some spectral phenomena that depend on the geometry of the support of the singular potential, and we obtain estimates for the singular values of the resolvent differences of the unperturbed Schrödinger operator and the Schrödinger operators with δ and δ' potential, respectively.

On existence and uniqueness problems for stationary Fokker-Planck-Kolmogorov equations on the whole space

V. I. Bogachev (Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University)

We discuss some recent progress in the study of stationary Fokker–Planck–Kolmogorov equations of the form

$$\mathrm{div}\,(A\nabla\varrho - \varrho b) = 0$$

in the class of integrable functions ϱ on the whole space $\mathbb{R}^d$ and in the smaller class of probability densities, where A is a mapping with values in the space of positive-definite operators and b is a vector field. Various conditions for the existence and uniqueness of solutions will be considered along with a number of challenging open problems. For example, it is not known whether the equation $\Delta\varrho - \mathrm{div}\,(\varrho b) = 0$ with a smooth vector field b can have several probability solutions such that the linear space generated by all probability solutions is finite-dimensional. However, there are examples where the latter space is infinite-dimensional. Sufficient conditions for the uniqueness of probability solutions are expressed in terms of the so-called Lyapunov functions, but it remains unknown to what extend the existence of such functions is necessary. Connections with stationary distributions of diffusion processes will be also briefly discussed.

Scattering and inverse scattering for a left-definite Sturm–Liouville problem

B. M. Brown (Cardiff University)
C. Bennewitz (Lund University)
R. Weikard (Birmingham, Alabama)

This work develops a scattering and an inverse scattering theory for the Sturm–Liouville equation $u'' + qu = \lambda wu$ where w may change sign but $q \neq 0$. Thus the left-hand side of the equation gives rise to a positive quadratic form and one is led to a leftdefinite spectral problem. The crucial ingredient of the approach is a generalized transform built on the Jost solutions of the problem and hence termed the Jost transform and the associated Paley–Wiener theorem linking growth properties of transforms with support properties of functions. One motivation for this investigation comes from the Camassa–Holm equation for which the solution of the Cauchy problem can be achieved by the inverse scattering transform for $u'' + 1/4u = \lambda wu$.

On a new moment problem denerated by boundary value problems for PDEs

V. P. Burskii (Inst. Appl. Math. Mech. NASU)

The report is devoted to a connection between ill-posed boundary value problems in a bounded domain for a PDE that isn't proper elliptic and a new moment problem on a curve, which can be called generalized trigonometric.

Consider the following moment problem: $\int_{\partial\Omega} \alpha(s)(x(s) \cdot \tilde{a}^j)^N ds = \mu_N^j;\ j = 1,2;\ N \in \mathbb{Z}_+,\ x(s) \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ where on two given vectors $\tilde{a}^j \in \mathbb{C}^2$ and on two sequences of numbers μ_N^j it is found the function α. Obviously, for the case when $\partial\Omega$ is the unit circle and vectors $\tilde{a}^j$, $j = 1,2$ are equal $\tilde{a}^1 = (1,i); \tilde{a}^2 = (1,-i)$ this moment problem turn on well-known trigonometric moment problem because then $(x(s) \cdot \tilde{a}^j)^N = \exp(\pm iN)$.

Among a lot of problems connected with above moment problem we will consider the problem of indeterminacy (uniqueness): for what curve $\partial\Omega$ and vectors $\tilde{a}^j$, $j = 1,2$ there exists a function α such that

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1,2,\ \int_{\partial\Omega} \alpha(s)(x(s) \cdot \tilde{a}^j)^N ds = 0. \tag{1}$$

Consider also the partial differential equation that we will write down as

$$(\nabla \cdot a^1)(\nabla \cdot a^2)u = 0, \tag{2}$$

where $a^j = (a_1^j, a_2^j), j = 1, 2$ are unit complex vectors and $\tilde{a}^j \cdot a^j = 0$.

Statement 1. *Let $m \geq k \geq 3$ and let we have three sets of statements:*

1_m*) The problem* (1) *has a nontrivial solution* $\alpha \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$.

2_k*) The Dirichlet problem* $u|_{\partial\Omega} = 0$ *for* (2) *has a nontrivial solution* $u \in H^k(\Omega)$.

3_k*) The Neumann problem* $u'_{\nu_*}|_{\partial\Omega} = 0$ *for* (2) *has a solution* $const \neq u \in H^k(\Omega)$.

Then $1_m) \Rightarrow 2_{m-q})$; $1_m) \Rightarrow 3_{m-q})$; $2_m) \Rightarrow 1_m)$; $3_m) \Rightarrow 1_m)$ *with* $q = 1 + 0$ *(By definition, for bounded domain* $H^{k+0}(\Omega) = \bigcup_{\epsilon>0} H^{k+\epsilon}(\Omega)$*).*

We have a full answer on above problems in the cases when the boundary is an ellipse or a bi-quadratic algebraic curve $F(x, y) := \sum_{i,k=0}^{2} a_{ik}x^i y^k = 0$. This answer is given in terms of coefficients of curve equation and vectors a^j. Thus, for the unit disk $K := \Omega$ the problem (1) has a nontrivial solution iff the number φ_0/π is a rational number, here $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$, $\operatorname{tg}\varphi_j = a_2^j/a_1^j$. Properties of nonhomogeneous boundary value problems are characterized by properties of the problem (1) also.

Let M_l^j be a subspace of a Sobolev space $H^l(\partial\Omega)$ for what the equality (1) is fulfilled and let $H_\rho^m(\partial\Omega)$ be a weight Sobolev space which is built by vectors a^j for improperly elliptic equation (2). Let's say that vectors $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ have $H_\rho^m - H^l$-property on the curve $\partial\Omega$, $l \leqslant m$, if for any $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ exist there unique functions $\alpha^1 \in M_l^1$, $\alpha^2 \in M_l^2$ such that $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + const$. Then, for example, the Dirichlet problem $u|_{\partial K} = \psi$ in the unit disk K has an unique solution $u \in H^l(K)$ if $\psi \in H_\rho^l(K)$ and vectors $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ have $H_\rho^m - H^l$-property on the curve ∂K. The last can be full characterized also.

About difference equations and matrix of the second order

A. Yu. Duplishcheva (VSU)

Lets $\mathcal{X}$ be a complex Banach space, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ be Banach algebra of bounded linear operators acting in $\mathcal{X}$ with norm $||A|| = \sup\limits_{||x||\leq 1} ||Ax||, x \in \mathcal{X}, A \in \operatorname{End}\mathcal{X}$. We note that the operator A is called *invertible* if the kernel of this operator contains only zero element, i. e. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{A}x = 0\}$ and image $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{\mathcal{A}x, x \in \mathcal{X}\}$ of operator $\mathcal{A}$ is equal to the whole space $\mathcal{X}$. Lets consider the pair of operators $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ and $\mathbb{A} \in \operatorname{End}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ where

$$\mathcal{A} = A^2 + B_1 A + B_2, \quad A, \quad B_i \in \operatorname{End}\mathcal{X}, \quad i = 1, 2,$$

and

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ B_2 x_1 + Ax_2 + B_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad x \in (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}.$$

respectively.

Definition 1. Lets $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$. Consider next conditions:

1) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$ (i. e. $\mathcal{A}$ is injective);

2) $1 \le n = \dim\ker\mathcal{A} < \infty$ where $\dim\ker\mathcal{A}$ is a dimension of kernel of operator $\mathcal{A}$;

3) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ is infinite-dimensional subspace from $\mathcal{X}$ ($\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \infty$);

4) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ is complementable subspace in $\mathcal{X}$;

5) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}} = \operatorname{Im}\mathcal{A}$ (i.e. image of operator $\mathcal{A}$ is closed). This condition is equal to positivity of quantity (minimum module of operator $\mathcal{A}$)

$$\gamma(\mathcal{A}) = \inf_{x \in D(\mathcal{A}) \setminus \operatorname{Ker}\mathcal{A}} \frac{||\mathcal{A}x||}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}\mathcal{A})},$$

where $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}\mathcal{A}) = \inf\limits_{x_0 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}} ||x - x_0||$ is a distance between vector x and subspace $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

6) Operator $\mathcal{A}$ is correct (uniformly injective), i.e. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$ and $\gamma(\mathcal{A}) > 0$;

7) $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ — is closed subspace from $\mathcal{X}$ of finite codimension $\operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathcal{A} = m \ge 1$;

8) $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ is closed subspace from $\mathcal{X}$ of infinite codimension ($\operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathcal{A} = \infty$);

9) $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ is closed complementable subspace in $\mathcal{X}$;

10) $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{X}$ (i. e. $\mathcal{A}$ is surjective operator);

11) Operator $\mathcal{A}$ is invertible.

The operator $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ is in state of invertible S if conditions $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le 11$ from the whole set of conditions $S = i_1, \ldots, i_n$ hold. The set of invertibility states of operator $\mathcal{A}$ is denoted via symbol $St_{inv}\mathcal{A}$.

Theorem 1. *The set of invertibility states of operator* $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ *and* $\mathbb{A} \in \operatorname{End} \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ *is equal, i. e.*

$$St_{inv}(\mathcal{A}) = St_{inv}(\mathbb{A}).$$

Inverse scattering transform in long time asymptotic analysis for KdV and Toda shock problems

I. Egorova (B. Verkin institute for Low Temperature Physics, Kharkov, Ukraine)

We discuss some old and recent developments in the scattering theory of the Schrödinger operator with smooth steplike potential. These results are a basis for solving the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial profile by means of the inverse scattering transform method.

We also discuss a long time asymptotic behavior of the KdV shock problem solution. The classical inverse scattering transform and its modification — the nonlinear steepest descent — are used to derive asymptotic formulas for this solution in the principal regions of the space/time variables half plane.

Analogous results are obtained for the Toda shock problem.

Structure of dynamical flow and nonlocal feedback stabilization for normal parabolic equations

A. V. Fursikov (Mech.-math. MSU)

We introduce and study so-called normal parabolic equations in order to understand better properties of equations of Navier–Stokes type.

Semilinear parabolic equation is called normal parabolic equation (NPE) if its nonlinear term B satisfies the condition: $\forall v \in H^1$ $B(v)$ is collinear to v. This condition means that solutions of NPE does not satisfies energy estimate “in the most degree”.

For 3D Helmholtz equations we derive normal parabolic equations (NPE), which nonlinear term $B(v)$ is orthogonal projection in L_2 of nonlinear terms for Helmgoltz equation on the line generated by v. NPE corresponding to Burgers equation is obtained similarly. The structure of dynamical flow corresponding to these NPEs will be discribed.

For NPE corresponding to Burgers equation we construct nonlocal feedback stabilization to zero of solutions by starting or impulse controls supported in an arbitrary fixed sub domain of the spatial domain. The last result can be applied to stabilization of solutions for Burgers equations.

Stabilizability of 2D-Stokes system in exterior of the circle

A. V. Gorshkov (Mech.-math. MSU)

In the domain $B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| \geqslant r_0\}$, $r_0 > 0$ consider 2D-Stokes system

$$\partial_t v - \Delta v = \nabla p, \tag{1}$$
$$\text{div } v(t,x) = 0, \tag{2}$$
$$v(0,x) = v_0(x), \tag{3}$$
$$v(t,x') = u(t,x'),\ |x'| = r_0, \tag{4}$$
$$v(t,x) = 0,\ |x| \to \infty. \tag{5}$$

Here $v = (v_1, v_2)$ is the velocity field and p is the pressure. The problem under investigation is as follows. For any fixed $k > 0$ one must find such a boundary control function $u(t,x')$ that the solution $v(t,x)$ goes to zero as

$$\|v(t,\cdot)\|_{L_2(B_{r_0})} \leqslant \frac{C}{t^k}, \tag{6}$$

with constant C depending on $k, r_0, v_0(\cdot)$.

Particularly, physical realization of such control could be rotation of the circle around origin, which leads to boundary function depending only on angular velocity. But presented results also cover more complicated types of boundary control.

The statement of this problem was the subject of papers [**1**, **2**], where the stable invariant manifolds based on discrete spectrum of linearised operator were the key point of stabilization. But in current work the construction of stable manifolds is based on continuous spectrum of Laplace operator.

By means of curl operator our system reduces to scalar equation for $\omega(t,x) = \text{curl } v(t,x)$

$$\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial t} - \Delta\omega = 0, \omega(0,x) = \omega_0(x)$$

Since boundary control $u(t,x')$ is unknown, original stabilization problem for velocity v is in some sense equivalent to the same one for curl ω. From this point exterior dirichlet problem for v goes to the same problem for ω

and we needn't construct interrelation between boundary controls in terms of velocity and curl.

We use direct methods for constructing feedback control $\omega(t, x')$, $|x'| = r_0$, based on spectral decomposition of Laplace operator in exterior domains with help of Fourier–Bessel and Weber–Orr integrals.

Stability condition (6) obliges to use weighted spaces for initial datum

$$L_{2,N}(B_{r_0}) = \{f(x) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(B_{r_0})} = \int_{B_{r_0}} |f(x)|^2 (1 + |x|^2)^N dx < \infty\}$$

Theorem. *For any $k > 1$ and initial function $v_0(\cdot) \in H^1(B_{r_0}) \cap L_{2,N}(B_{r_0})$, $N \geqslant 4k - 5/2$, there exists control $u \in C\big(\mathbb{R}_+; H^{\frac{1}{2}}(S_{r_0})\big)$ that the solution $v(t,x) \in H^{1,2}(B_{r_0})$ of* (1)-(5) *satisfies* (6).

This work is supported by RFFI (grant № 13-01-12476)

References

[**1**] A. V. Fursikov, A. V. Gorshkov, *Certain questions of feedback stabilization for Navier–Stokes equations* // Evolution Equations and Control Theory (EECT). — 2012. — V. 1, № 1. — P. 109–140. [**2**] A. V. Gorshkov, *Stabilizing a solution of the 2D Navier–Stokes system in the exterior of a bounded domain by means of a control on the boundary* // Sbornik: Mathematics. — 2012. — V. 203, № 9. — P. 1244.

A class of sharp interpolation inequalities for Sobolev spaces and discrete sequence spaces

A. A. Ilyin (Keldysh Institute of Applied Mathematics)

We propose a general method for finding sharp constants in the imbeddings of the Sobolev spaces $H^m(\mathcal{M})$, defined on a n-dimensional Riemann manifold $\mathcal{M}$ into the space of bounded continuous functions, where $m > n/2$. The method is based on the analysis of the asymptotics with respect to the spectral parameter of the Green's function of the elliptic operator of order 2m, the domain of the square root of which defines the norm of the corresponding Sobolev space. The cases of the n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$ and n-dimensional sphere $\mathbb{S}^n$ are treated in detail, as well as some manifolds with boundary. In certain cases when $\mathcal{M}$ is compact, multiplicative inequalities with remainder terms of various types are obtained.

The method is developed further to the case of imbeddings of the l^2-sequence spaces over d-dimensional lattices into the l_0^∞ spaces written as an interpolation inequality between the l^2-norm of a sequence and its difference. We find sharp constants, extremal elements and correction terms in this type of inequalities.

Applications to Carlson's inequalities and spectral theory of discrete operators are given.

References

[**1**] S. Zelik, A. Ilyin, *Green's function asymptotics and sharp interpolation inequalities* // Uspekhi Mat. Nauk. — 2014. — V. 69, № 2. — P. 23–76. English transl. in: Russian Math. Surveys. — 2014. — V. 69, № 2. [**2**] A. Ilyin, A. Laptev, S. Zelik, *Sharp interpolation inequalities for discrete operators and applications* // in preparation.

Inverse scattering problem for the nonstationary Dirac equation on the half-plane

M. I. Ismailov (Department of Mathematics, Gebze Institute of Technology, Turkey)

Consider the non-stationary Dirac system of $2n$ equations on the half-plane $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t): \quad x \geq 0, \quad -\infty < t < +\infty\}$ in the following form

$$\boldsymbol{\sigma}\psi_t - \psi_x = \mathbf{Q}\psi, \tag{1}$$

where

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{q}_{12}(x,t) \\ \mathbf{q}_{21}(x,t) & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

with the $n \times n$ zero matrix $\mathbf{0}$ and the $n \times n$ identity matrix $\mathbf{I}$. The functions $\mathbf{q}_{12}$ and $\mathbf{q}_{21}$ are the $n \times n$ matrix functions with measurable complex-valued rapidly decreasing (Schwartz) entries. The matrix function $\mathbf{Q}$ is called the potential.

We may breakup into left and right moving components by writing $\psi = [\psi_1, \psi_2]$ with ψ_1 representing the first n components of and ψ_2 the remaining n components of ψ.

For reasonable $a(t)$ and a constant matrix $\mathbf{H}$ of size $n \times n$ it is shown that there is a unique solution $\psi(x,t)$ of the system (1) with the boundary condition in $x = 0$

$$\psi_2(0,t) = \mathbf{H}\psi_1(0,t) \tag{2}$$

and the asymptotic condition

$$\psi_1(x,t) = a(t+x) + o(1), \quad x \to +\infty.$$

Further there is a function $b(t)$

$$\psi_2(x,t) = b(t-x) + o(1), \quad x \longrightarrow +\infty.$$

So the *left moving* incoming wave generated by $a(t)$ results in the medium responding with a *right moving* wave generated by $b(t)$. This is used to define a scattering map

$$\mathbf{S_H} : a(\cdot) \longrightarrow b(\cdot)$$

which depends on $\mathbf{Q}$ (and $\mathbf{H}$).

The *Inverse Scattering Problem* (ISP) considers the recovery of $\mathbf{Q}$ from $\mathbf{S_H}$.

Theorem. *The solution of an ISP on the half-plane for the system* (1) *with the boundary condition* (2) *is not unique if and only if* $\det H = 0$.

The unique restoration of the potential $\mathbf{Q}$ from the scattering map $\mathbf{S_H}$ with $\det \mathbf{H} \neq 0$ generalizes to matrix case the result of scalar nonstationary Dirac equation in [**1**].

When the potential is independent of t, (1) can be converted into the stationary Dirac equation by the separation of variables. The ISP for the stationary Dirac equation on the half line and on the line has been investigated in [**2**, **3**, **4**].

References

[**1**] L. P. Nizhnik, *Inverse scattering problems for hyperbolic equations* // Nauk. Dumka, Kiev, 1991 (in Russian). [**2**] M. G. Gasymov, B. M. Levitan, *The inverse problem for a Dirac system* // Soviet Math. Dokl. — 1966. — V. 7. [**3**] M. G. Gasymov, *The inverse scattering problem for a system of Dirac equations of order* $2n$ // Moscow Math. Soc. — 1968. — V. 19. [**4**] I. S. Frolov, *An inverse scattering problem for the Dirac system on the entire axis* // Soviet Math. Dokl. — 1972. — V. 13.

On boundary value problem for elliptic–parabolic equation: asymptotic analysis and effective numerical algorithm

J.-P. Lohéac (Ecole Centrale de Lyon)
T. O. Kapustina (Moscow State University)

This work is devoted to singularly perturbed boundary value problem for elliptic–parabolic equation. The aim is to construct an efficient numerical algorithm for this problem, based on asymptotic methods and approximated parabolic factorization of elliptic operator. The main advantage of this algorithm is that the problem can be solved faster and demands less computer resources then classical numerical scheme.

References

[1] J.-P.Lohéac, F. Nataf, M. Schatzman, *Parabolic approximations of the convection-diffusion equation* // Mathematics of Computation. — 1993. — V. 60. — P. 515—530. [2] V. G. Sushko, *Asymptotic representations for solutions of bisingular problems* // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 1999. — V. 18. — P. 51—151. [3] N. Kh. Rozov, T. O. Kapustina, *One boundary problem for elliptic–parabolic equation* // Differential Equations. — 2001. — V. 6 (37). — P. 847—848. [4] Lohéac J.-P., Kapustina T. O., *Asymptotic and numerical analysis of mixed type equation* // Proceedings of the International miniconference «Qualitative theory of differential equations and applications». Moscow: MESI, 2013. — P. 179—189.

Spectral analysis of Sturm–Liouville operator with periodic boundary conditions

A. V. Karpikova (VSU)

In a Hilbert space $L_2[0,2\pi]$, we consider Hill–Schrodinger operator

$$L : D(L) \subset L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi],$$

which is determined by the differential equation

$$l(y) = -y'' + vy, \tag{1}$$

with periodic domain

$$D(L) = \left\{ y \in W_2^2[0,2\pi] : y(2\pi) = y(0), y'(2\pi) = y'(0) \right\}.$$

In formula (1) symbol v denotes potential. If it is 0 (i.e., zero potential) then the operator will act as the unperturbed operator and the operator of multiplication by a potential v-perturbed.

Note that no restrictions are imposed on the potential v, guaranteeing self-adjoint of perturbation, and some other restrictions (such as smoothness), accessories except v Hilbert space $L^2 = L^2[0,2\pi]$ of a complex measurable on $[0,2\pi]$ square-integrable functions.

In the formulation of the estimates used by its Fourier series

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{int}, \quad t \in [0,2\pi]. \tag{2}$$

Operator L_0 is self-adjoint with compact resolvent of the following form:

$$\sigma(L_0) = \{n^2, n \in \mathbb{N} \cup 0 = \mathbb{Z}_+, t \in [0, 2\pi]\},$$

$e_n^1(t) = e^{int}$, $e_{-n}^1(t) = e^{-int}$, $t \in [0, 2\pi]$, eigenfunctions for the eigenvalue $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, and $e_0(t) = 1$, $t \in [0, 2\pi]$ — eigenfunction corresponding to the eigenvalue $\lambda_0 = 0$.

The main result is related to the study of the asymptotic behavior of the eigenvalues of operator L.

Consider the following sequence

$$\omega_n = v_{-n} v_n, \qquad \widetilde{\omega_n} = p_{-n} p_n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

where $p_n = v_{2n} + c_{n,-n}, p_{-n} = v_{-2n} + c_{-n,n}, v_n$ — the Fourier coefficients of (2).

Elements $c_{n,n}$, $c_{-n,-n}$, $c_{n,-n}$, $c_{-n,n}$, $n \in \mathbb{Z}$ of matrix of operator $P_n B \Gamma B P_n : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$, where $\mathcal{H}_n = Im P_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ in basis e_n, e_{-n} can be represented as

$$c_{n,n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ |j| \neq |n|}} v_{n-j} \frac{v_{j-n}}{(j^2 - n^2)}, \qquad c_{-n,-n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ |j| \neq |n|}} v_{-(n+j)} \frac{v_{j+n}}{(j^2 - n^2)},$$

$$c_{-n,n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ |j| \neq |n|}} v_{-(n+j)} \frac{v_{j-n}}{(j^2 - n^2)}, \qquad c_{n,-n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ |j| \neq |n|}} v_{n-j} \frac{v_{j+n}}{(j^2 - n^2)},$$

where $c_{n,n} = c_{-n,-n}$.

Definition. Two linear operators $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, are called *similar*, if there is a continuously invertible operator $U \in End\mathcal{X}$ such, that $UD(A_2) = D(A_1)$ and $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Operator U is called *conversion operator* for operator A_1 and A_2.

Next results were obtained by using the similar operators method.

Theorem 1. There exists a number $m \in \mathbb{Z}_+$ such that the spectrum of L has the form $\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup\limits_{n \geq m+1} \sigma_n \right)$, where $\sigma_{(m)}$ — finite set with cardinality not exceeding $2m + 1$, and sets $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}$, $n \geq m + 1$, no more than a two-point and are defined by

$$\lambda_n^{\pm} = n^2 + v_0 - \frac{1}{2n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{v_k v_{-k}}{k} \pm \sqrt{v_{2n} v_{-2n}} + \frac{\beta_n^{\pm}}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq m + 1,$$

where the sequence $\beta_n^{\pm}$ with property $\sum\limits_{n \geq m+1} |\beta_n^{\pm}|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Let $\widetilde{P}_m, \widetilde{P}_n, n \geq m+1$, be Riesz spectral projections, constructed by operator L and sets $\sigma_{(m)}, \sigma_n, |n| \geq m+1$ respectively. Over $P_{(m)}$ denotes the projection $\sum\limits_{k \leq m} P_k$, which is the Riesz projection built from a finite set $\sigma_m^0 = \{-m, ..., m\}$. For any subset $\Omega \subset \{m+1, m+2, ...\}$ denote by $P(\Omega)$ spectral projection $\sum\limits_{k \in \Omega} P_k$, and $\widetilde{P}(\Omega)$ be the spectral projection $\sum\limits_{k \in \Omega} \widetilde{P}_k$.

Further for any subset $\Omega \subset \mathbb{Z}$ through $\alpha(\Omega, X)$ denote $\max\limits_{n \in \Omega} \alpha_n(X)$.

Theorem 2. For any subset $\Omega \subset \{m+1, m+2, \ldots\}$ the following estimations of the spectral decomposition unconditional uniform convergence hold:

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_0(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \Gamma \widetilde{X})),$$
$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_1 \left(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \widetilde{B}) \frac{1}{m(\Omega)}\right),$$
$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_2 \left(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, JB) + \alpha(\Omega, B \Gamma B)\right) \frac{1}{m(\Omega)}.$$

where $C_0, C_1, C_2 > 0$ are independent from the Ω constants and $m(\Omega) = \min\limits_{k \in \Omega} k$.

Invariant Subspace of the Hardy Space over the polydisc

B. B. Koca (İstanbul University)

We describe invariant subspaces of the Hardy space over the polydisc under the multiplication operators by the independent variables that are generated by an inner function in view of classical Lax–Helson–Halmos theorem.

Accurate semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schroedinger operator

Yu. A. Kordyukov (Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia)

Let (M, g) be a two-dimensional compact oriented Riemannian manifold (possibly with boundary), and let $\mathbf{A}$ be a real-valued differential 1-form on M. We consider the Schrödinger operator with magnetic potential $\mathbf{A}$ (the magnetic Laplacian), which is the second order differential operator on M defined by $H^h = (ih\, d + \mathbf{A})^*(ih\, d + \mathbf{A})$ (here $h > 0$ is a semiclassical parameter). If M has non-empty boundary, we assume that the operator H^h satisfies the Dirichlet boundary condition.

Let $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$ be the magnetic field, which is a closed 2-form on M. One can write $\mathbf{B} = b\, dx_g$, where $b \in C^\infty(M)$ and dx_g is the Riemannian volume form. We assume that $b_0 = \min_{x\in M} |b(x)| > 0$, the set $\{x \in M : |b(x)| = b_0\}$ is a single point x_0, which belongs to the interior of M, and the magnetic field b is non-degenerate at x_0 (the case of discrete wells).

First, we establish complete asymptotic expansions for the low-lying eigenvalues $\lambda_0(H^h) \leq \lambda_1(H^h) \leq \lambda_2(H^h) \leq \ldots$ of the operator H^h as $h \to 0$ (in semiclassical limit). Then we provide an asymptotic description of the eigenvalues of H^h in the interval $(-\infty, h(b_0 + \gamma_0)]$ for some $\gamma_0 > 0$ independent of the semiclassical parameter h.

This is joint work with Bernard Helffer.

Spectral asymptotics for 2×2 canonical systems

A. Kostenko (University of Vienna)

We study the high energy behavior of Weyl–Titchamrsh m-functions for 2×2 canonical systems. The main results of our talk provide one-term asymptotic formulas for m-functions.

We apply our results to Krein strings, radial Dirac and Schrödinger operators.

The talk is based on joint works with J. Eckhardt and G. Teschl.

On a spectral problem for the Sturm–Liouville operator

A. Makin (Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science)

Consider the Sturm-Liouville equation

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

with two-point boundary conditions

$$B_i(u) = a_{i1}u'(0) + a_{i2}u'(\pi) + a_{i3}u(0) + a_{i4}u(\pi) = 0, \tag{2}$$

where the $B_i(u)$ $(i = 1, 2)$ are linearly independent forms with arbitrary complex-valued coefficients and $q(x)$ is an arbitrary complex-valued function of class $L_1(0, \pi)$. It is convenient to write conditions (2) in the matrix form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

and denote the matrix composed of the ith and jth columns of A ($1 \leqslant i < j \leqslant 4$) by $A(ij)$; we set $A_{ij} = \det A(ij)$.

It is known that conditions (2) can be divided into two classes:

1) nondegenerate conditions;

2) degenerate conditions.

Let boundary conditions (2) be degenerate. According to [**1**, **2**], this is equivalent to the fulfillment of the following conditions:

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} = 0, \quad A_{34} = 0.$$

According to [**2**], any boundary conditions of the considered class are equivalent to the boundary conditions determined by the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{pmatrix}, \quad \text{or} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

If in the first case $d = 0$ then for any potential $q(x)$ we have the initial value problem (the Cauchy problem) which has no eigenvalues. The same situation takes place in the second case.

Further we will consider the first case if $d \neq 0$. Then the boundary conditions can be written in more visual form

$$u'(0) + du'(\pi) = 0, \quad u(0) - du(\pi) = 0. \tag{3}$$

Denote by $c(x, \mu), s(x, \mu)$ ($\lambda = \mu^2$) the fundamental system of solutions to (1) with the initial conditions $c(0, \mu) = s'(0, \mu) = 1$, $c'(0, \mu) = s(0, \mu) = 0$. By PW_σ we denote the class of entire functions $f(z)$ of exponential type $\leqslant \sigma$ such that $||f(z)||_{L_2(R)} < \infty$, and by PW_σ^- we denote the set of odd functions in PW_σ.

By performing simple manipulations, we obtain the relation

$$\Delta(\mu) = \frac{d^2 - 1}{d} + c(\pi, \mu) - s'(\pi, \mu) = \frac{d^2 - 1}{d} + \frac{f(\mu)}{\mu},$$

where $f(\mu) \in PW_\pi^-$. Notice, that simple calculations show that if $d = \pm 1$ and $q(x) \equiv 0$ then any $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of infinite multiplicity. This abnormal example constructed by Stone illustrates the difficulty of investigation of problems with boundary conditions of the considered class. It is known that $c(\pi, \mu) - s'(\pi, \mu) \equiv 0$ if and only if $q(x) - q(\pi - x) = 0$ almost everywhere on the segment $[0, \pi]$.

The following assertion provides sufficient condition to be satisfied by the characteristic determinant $\Delta(\mu)$.

Theorem 1. *Let a function $v(\mu)$ have the form*

$$v(\mu) = \gamma + \frac{f(\mu)}{\mu}, \tag{4}$$

where γ is a complex number, $f(\mu) \in PW_\pi^-$, and satisfies the condition $\int_{-\infty}^{\infty} |\mu^m f(\mu)|^2 d\mu < \infty$, where m is a nonnegative integer number. Then there exists a function $q(x) \in W_2^m(0,\pi)$ such that the characteristic determinant $\Delta(\mu)$ of problem (1), (2), where either $d = (\gamma + \sqrt{\gamma^2+4})/2$ or $d = (\gamma - \sqrt{\gamma^2+4})/2$ and with the potential $q(x)$ is identically equal to the function $v(\mu)$.

Therefore, Theorem 1 reduces the problem on the structure of the spectrum of problem (1), (3) with degenerate boundary conditions to the problem on the expansion of a function of the form (4) into a canonical product.

Let us define a sequence $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ in this way: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$, $a_{k+1} = a_k + 2p$, if $2^p < k < 2^{p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, and $a_{k+1} = a_k + (a_k - a_{k-1}) + 2$, if $k = 2^p$ $(p = 2, 3, \ldots)$. Set

$$F(\mu) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{a_k^2}\right)^{a_{k+1} - a_k - \delta_k},$$

where $\delta_k = 0$, if $k \neq 2^p$, and $\delta_k = 1$, if $k = 2^p$, $(p = 2, 3, \ldots)$.

Theorem 2. *For any real x the following inequality holds*

$$|F(x)| \leqslant C_3(|x|+1)^M,$$

where M is a sufficiently large number.

Denote

$$\tilde{f}(\mu) = \mu \prod_{k=M+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{a_k^2}\right)^{a_{k+1} - a_k - \delta_k}.$$

It is easily shown that $\tilde{f}(\mu) \in PW_\pi^-$. This, together with Theorem 1 implies that there exists a potential $\tilde{q}(x) \in L_2(0,\pi)$, such that for the characteristic determinant $\tilde{\Delta}(\mu)$ of problem

$$u'' - \tilde{q}(x)u + \lambda u = 0, \quad u'(0) + du'(\pi) = 0, \quad u(0) - du(\pi) = 0 \tag{5}$$

$(d = \pm 1)$ we have the equality

$$\tilde{\Delta}(\mu) = \tilde{f}(\mu)/\mu.$$

It follows from the definition of sequence $\{a_k\}$ that multiplicities of zeros a_k of constructed above function $\tilde{f}(\mu)$ monotonically not decrease and tend to infinity as $k \to \infty$. Therefore, the eigenvalues of problem (5) have the desired property: their multiplicities tend to infinity and the corresponding root function system contains associated functions of arbitrary high order, i. e. the dimensions of root subspaces infinitely grow.

For any problem (1), (3) let Ω denote the set of potentials $q(x)$ from the class $L_1(0,1)$ such that the system of root functions contains associated functions of arbitrary high order, $\bar{\Omega} = L_1(0,1) \setminus \Omega$.

Theorem 3 [3]. *The sets Ω and $\bar{\Omega}$ are everywhere dense in $L_1(0,1)$.*

Completeness of the root function system of problem (1), (3) was investigated in [**4**]. Denote $Q(x) = q(x) - q(\pi - x)$. In particular, it was shown that if $q(x) \in C^k[0,\pi]$ for some $k \geqslant 0$, and $Q^{(k)}(\pi) \neq 0$, then the root function system is complete in $L_2(0,\pi)$.

Теорема 4. *The root function system of problem* (4) *is complete in the space $L_2(0,\pi)$.*

Since for a wide class of potentials $q(x)$ the root function system of problem (1), (3) is complete in $L_2(0,\pi)$ one can set a question whether the mentioned system forms a basis.

Recently, it was proved in [**5**] that the root function system never forms an unconditional basis in $L_2(0,\pi)$ if multiplicities of the eigenvalues are uniformly bounded by some constant. Moreover, under the condition mentioned above it was established there that if the eigen- and associated function system of general ordinary differential operator with two-point boundary conditions forms an unconditional basis then the boundary conditions are regular. Article [**5**] was published in 2006. At that time it was unknown whether there exists a potential $q(x)$ providing unbounded growth of multiplicities of the eigenvalues.

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 13-01-00241).

References

[**1**] V. A. Marchenko, *Sturm-Liouville Operators and Their Applications.* Kiev, 1977 (in Russian); English transl.: Birkhäuser, Basel, 1986. [**2**] P. Lang and J. Locker, *Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$. II. Analysis of cases* // J. Math. Anal. Appl. — 1990. — V. 146, № 1. — P. 148–191. [**3**] A. S. Makin, *On a new class of boundary value problems for the Sturm–Liouville operator* // Differ. Equations. — 2013. — V. 49, № 2. — P. 262–266; translation from Differ. Uravn. — 2013. — V. 49, № 2. — P. 260–264 (Russian). [**4**] M. M. Malamud, *On the Completeness of the System*

of Root Vectors of the Sturm–Liouville Operator with General Boundary Conditions // Funct. An. and Its Appl. — 2008. — V. 42, № 3. — P. 198–204; translation from Funkt. An. i ego Pr. — 2008. — V. 42, № 3. — P. 45–52 (Russian). **[5]** A. Minkin, *Resolvent growth and Birkhoff-regularity* // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — V. 323, № 1. — P. 387–402.

Trace formulas for pairs of resolvent comparable operators

M. M. Malamud (Institute of Applied Mathematics and Mechanics)

Recall that a pair $\{H', H\}$ of closed linear operators in a Hilbert space $\mathfrak{H}$ with resolvent sets $\rho(H')$ and $\rho(H)$ are called resolvent comparable if $\rho(H') \cap \rho(H) \neq \emptyset$ and their resolvent difference is of trace class.

We will discuss trace formulas for pairs of self-adjoint, maximal dissipative and other types of resolvent comparable operators. In particular, *the existence of a complex-valued spectral shift function for a pair $\{H', H\}$ of maximal dissipative* resolvent comparable operators is proved. We also investigate the existence of a real-valued spectral shift function. Moreover, we treat in details the case of additive trace class perturbations. If H and $H' = H + V$ are m-dissipative and V is of trace class, it is shown that a complex-valued spectral shift function can be chosen to be summable. We also obtain trace formulas for a pair $\{A, A^*\}$ *assuming only that A and A^* are resolvent comparable.* In the later case the determinant of a characteristic function of A is involved in trace formulas.

Our results improve and generalize certain classical results of M. G. Krein for pairs of self-adjoint and dissipative operators, the results of A. Rybkin for such pairs, as well as the results of V. Adamyan, B. Pavlov, and M. Krein for pairs $\{A, A^*\}$ with a maximal dissipative operator A.

The results are applied to boundary value problems for differential equations.

The talk is based on works **[1]** and **[2]** joint with H. Neidhardt.

References

[1] M. Malamud, H. Neidhardt, *Perturbation determinants for singular perturbations* // Russian J. of Math. Phys. — 2014. — V. 21, № 1. — P. 55–98. **[2]** M. Malamud, H. Neidhardt, *Perturbation determinants and trace formulas for singular perturbations* // Preprint, `arXiv:1212.6887`, 2012.

On the stability of a forward-backward heat equation

M. Marletta (Cardiff University)
L. Boulton (Heriot Watt University)
D. Rule (Linkopings University)

We examine spectral properties of a family of periodic singular Sturm–Liouville problems which are highly non-self-adjoint but have purely real spectrum. The problem originated from the study of the lubrication approximation of a viscous fluid film in the inner surface of a rotating cylinder and has received a substantial amount of attention in recent years. Our main focus will be the determination of Schatten class inclusions for the resolvent operator and regularity properties of the associated evolution equation.

Individual invariance principle for diffusions in a degenerate periodic environment

P. Mathieu (Université d'Aix-Marseille)
B. A. Moustapha (Université d'Aix-Marseille)

We consider a divergence form operator of the type $e^V \operatorname{div}(e^V \operatorname{grad}) \in R^d$, where V is periodic. Homogenization results as well as invariance principles for the associated diffusion process have been obtained under smoothness assumptions on V (See e.g. Bensoussan–Lions–Papanicolaou, $'78$) or when V is uniformly bounded (Lejay, 2001). An averaged form of the central limit theorem is proved in Piatnitski–Zhikov, 2006 if e^V and e^{-V} are both integrable. More recent works include Andres–Deuschel–Slowik, 2014 when higher integrability is assumed on e^V and e^{-V}. In our work, we showed the individual invariance principle (that is for almost all starting points) under the assumption that e^V and e^{-V} are both integrable. The proof uses tools from harmonic analysis.

References

[**1**] `http://arxiv.org/pdf/1312.4817.pdf`.

On characteristic matrices and spectral functions of two singular point symmetric systems

V. I. Mogilevskii (Луганский национальный университет)

Let $\mathbb{H}$ be a finite-dimensional Hilbert space, let $[\mathbb{H}]$ be the set of all operators in $\mathbb{H}$ and let $J \in [\mathbb{H}]$ satisfies $J^* = J^{-1} = -J$. We will discuss first-order symmetric system

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y + \Delta(t)f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

with the $[\mathbb{H}]$-valued coefficients $B(t) = B^*(t)$ and $\Delta(t) \geqslant 0$. Our goal is a characterization of certain properties of the system (1) on the whole line $\mathbb{R}$ in terms of the objects associated with its restrictions onto the half-lines $\mathbb{R}_\pm$.

Let $T_{\min}$ be the minimal linear relation induced by system (1), let $T_{\min,r}$ ($T_{\min,l}$) be the minimal linear relation induced by the restriction of this system onto $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) and let $n_\pm(T_{\min,r})$ and $n_\pm(T_{\min,l})$ be deficiency indices of $T_{\min,r}$ and $T_{\min,l}$ respectively. We show that self-adjoint separated boundary conditions for system (1) exist if and only if

$$n_+(T_{\min,l}) - n_-(T_{\min,l}) = n_-(T_{\min,r}) - n_+(T_{\min,r}) = |\kappa_- - \kappa_+|,$$

where $\kappa_\pm = \dim\ker(iJ \mp I)$. Thus, in the case $\kappa_+ \neq \kappa_-$ investigation of systems (1) on $\mathbb{R}$ with equal deficiency indices of $T_{\min}$ naturally gives rise to systems on $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{R}_-$ with unequal deficiency indices of the corresponding minimal relations.

As is known the Titchmarsh formula

$$\Omega(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{m_r(\lambda)m_l(\lambda)}{m_r(\lambda)+m_l(\lambda)} & \frac{m_l(\lambda)}{m_r(\lambda)+m_l(\lambda)} \\ \frac{m_l(\lambda)}{m_r(\lambda)+m_l(\lambda)} & -\frac{1}{m_r(\lambda)+m_l(\lambda)} \end{pmatrix}$$

gives a connection between the characteristic matrix $\Omega(\lambda)$ of the Sturm-Liouville operator on $\mathbb{R}$ and the Titchmarsh-Weyl functions (m-functions) $m_r(\lambda)$ and $m_l(\lambda)$ corresponding to restrictions of this operator onto $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{R}_-$ respectively. We derive the Titchmarsh type formula for the characteristic matrix $\Omega(\lambda)$ of the boundary problem for system (1) with self-adjoint separated boundary conditions. Such a formula gives a representation of $\Omega(\lambda)$ in terms of m-functions $m_r(\lambda)$ and $m_l(\lambda)$ of the system on $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{R}_-$ respectively (the m-functions $m_r(\lambda)$ and $m_l(\lambda)$ were defined in [**1**, **2**] for system (1) on the half-line with arbitrary (possibly unequal) deficiency indices of the corresponding minimal relation).

By using the Titchmarsh type formula we parameterize all spectral functions of the boundary problems for system (1) with separated boundary conditions immediately in terms of these conditions. Similar parameterizations for various classes of boundary value problems have earlier been obtained by Kac and Krein, Fulton, Hinton and Shaw, Langer and Textorius and others.

The talk is based on the paper [**3**].

References

[**1**] S. Albeverio, M. M. Malamud, V. I. Mogilevskii, *On Titchmarsh–Weyl functions and eigenfunction expansions of first-order symmetric systems* // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2013. — V. 77. — P. 303–354. [**2**] V. I. Mogilevskii, *On eigenfunction expansions of first-order symmetric systems and ordinary differential operators of an odd order* // `arXiv:1307.6741`. [**3**] V. I. Mogilevskii, *On characteristic matrices and eigenfunction expansions of two singular point symmetric systems* // Mathematische Nachrichten, accepted.

The spectrum of the operators tensor product with applications to the small ball probabilities

A. I. Karol' (St. Petersburg State University)
A. I. Nazarov (PDMI RAS and St. Petersburg State University)

We discuss spectral asymptotics for the compact operators of "tensor product" type with regularly varying marginal asymptotics. Two different convolutions of slowly varying functions arise in this connection. Some applications to the problem of small ball probabilities for multiparameter Gaussian fields are given.

Authors were supported by RFBR grant 13-01-00172 and by St. Petersburg University grant 6.38.64.2012.

References

[**1**] A. Karol', A. Nazarov, Ya. Nikitin, *Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators* // Trans. AMS. — 2008. — V. 360, № 3. — P. 1443–1474.

[**2**] A. I. Karol', A. I. Nazarov, *Small Ball Probabilities for Smooth Gaussian fields and Tensor Products of Compact Operators* // Mathematische Nachr. — 2014. — V. 287, № 5–6, — P. 595–609.

On the Analogs of Szëgo Theorem for Random and Almost Periodic Operators

L. Pastur (Verkin Institute for Low Temperatures, Kharkiv, Ukraine)

We consider an asymptotic setting for ergodic operators generalizing that for the Szëgo theorem on the determinants of finite-dimensional restrictions of the Toeplitz operators. The setting is formulated via a triple consisting of an ergodic operator and two functions, the symbol and the test function. In the frameworks of this setting we analyze two important examples of ergodic operators: the one dimensional discrete Schrodinger operator with random

i. i. d. potential and the same operator with quasiperiodic potential. In the first case we find that the corresponding asymptotic formula contains a new subleading term proportional to the square root of the length of the interval of restriction. The origin of the term are the Gaussian fluctuations of the corresponding trace, i. e, in fact, the Central Limit Theorem for the trace. In the second (quasiperiodic) case the subleading term is bounded as in the Szëgo theorem but unlike the theorem, where the term does not depend on the length, in the quasiperiodic case the term is an ergodic process in the length of the interval of the restriction.

First eigenpair asymptotics for a singularly perturbed operator with oscillating coefficients

A. Piatnitski (P. N. Lebedev Physical Institute RAS; Narvik University College)

V. Rybalko (B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering)

The talk will focus on the the ground state (first eigenpair) asymptotics for a singularly perturbed second order elliptic operator of the form

$$A^\varepsilon = \varepsilon^2 a^{ij}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \varepsilon b^i\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x^i} + c\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

with rapidly oscillating locally periodic coefficients. The corresponding spectral problem is stated in a regular bounded domain in $\mathbb{R}^d$ with homogeneous Dirichlet boundary condition, ε being a small positive parameter.

It will be shown that, under the ellipticity assumptions, the limit of principal eigenvalue and the logarithmic asymptotics of principal eigenfunction can be described in terms of a viscosity solution to "homogenized" Hamilton–Jacobi type equation with state constraint boundary condition.

A viscosity solution of homogenized problem need not be unique. In certain particular cases we can construct the second term of the eigenpair asymptotics and choose the solution of homogenized problem which is responsible for the asymptotics in question.

References

[**1**] A. Piatnitski, V. Rybalko, *On the first eigenpair of singularly perturbed operators with oscillating coefficients* // `arXiv:1206.3754.` [**2**] A. Piatnitski, A. Rybalko, V. Rybalko, *Ground states of singularly perturbed convection-diffusion equation with oscillating coefficients* // To appear in COCV.

Spectral properties of differential operator of fourth order with periodic and semi-periodic boundary conditions

D. M. Polyakov (Voronezh State University)

Let $L_2[0,1]$ be a Hilbert space of all measurable complex-valued functions on $[0,1]$ with the inner product $(x,y)=\int_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}\,\mathrm{d}\tau$, $x,y\in L_2[0,1]$. By $W_2^4[0,1]$ denote the Sobolev space

$$\{y:[0,1]\to\mathbb{C}: y,y',y''\in C^1[0,1],\ y'''\in AC[0,1],\ y^{IV}\in L_2[0,1]\}.$$

We consider two operator $L_{bc}:\mathrm{D}(L_{bc})\subset L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ determined by the following differential expression

$$l(y)=y^{IV}-a(t)y''-b(t)y,\quad \text{where}\quad a,b\in L_2[0,1].$$

The domain $D(L_{bc})$ is defined by the following boundary conditions:

a) periodic $bc=per$: $y^{(j)}(0)=y^{(j)}(1)=0$, $j=0,1,2,3$;

b) semi-periodic $bc=ap$: $y^{(j)}(0)=-y^{(j)}(1)=0$, $j=0,1,2,3$.

Hence, $\mathrm{D}(L_{bc})=\{y\in W_2^4[0,1]: y \text{ satisfies } bc\}$. The operators $L_{bc}^0:\mathrm{D}(L_{bc})=\mathrm{D}(L_{bc})\subset L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $L_{bc}^0 y=y^{IV}$, are self-adjoint positive operators with compact resolvent.

For the functions a, $b\in L_2[0,1]$ we have the following representation $a(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\mathrm{e}^{i2\pi kt}$, $b(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_k\mathrm{e}^{i2\pi kt}$, where a_k,b_k, $k\in\mathbb{Z}$, — the Fourier coefficients of functions a and b.

The spectrums $\sigma(L_{bc})$, $bc\in\{per,ap\}$, have the form

a) $\sigma(L_{per})=\{(2\pi n)^4, n\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. The corresponding eigenspace for $n\neq 0$ has the form $E_n^0=\mathrm{Span}\{e_n^1,e_n^2\}$, where eigenfunctions are $e_n^1(t)=\mathrm{e}^{i2\pi nt}$, $e_n^2(t)=\mathrm{e}^{-i2\pi nt}$, $t\in[0,1]$. If $n=0$, then $E_0^0=\{\alpha,\alpha\in\mathbb{C}\}$.

b) $\sigma(L_{ap})=\{\pi^4(2n+1)^4, n\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. The corresponding eigenspace has the form $E_n^0=\mathrm{Span}\{e_n^1,e_n^2\}$, where eigenfunctions are $e_n^1(t)=\mathrm{e}^{i\pi(2n+1)t}$, $e_n^2(t)=\mathrm{e}^{-i\pi(2n+1)t}$, $t\in[0,1]$.

The Riesz projectors P_n, $n\in\mathbb{Z}_+$, are defined as

a) $P_nx=(x,e_n^1)e_n^1+(x,e_n^2)e_n^2$, $n\in\mathbb{N}$, $P_0x=(x,e_0)e_0$,

b) $P_nx=(x,e_n^1)e_n^1+(x,e_n^2)e_n^2$, $n\in\mathbb{Z}_+$

for all $x\in L_2[0,1]$.

Using the Similar Operator Method, we obtain the following results.

Theorem 1. *The differential operators L_{bc}, $bc\in\{per,ap\}$ are operators with compact resolvent. The eigenvalues $\widetilde{\lambda}_n$ of operator L_{per} have the* *following asymptotic*

$$\widetilde{\lambda}_n = \big(2\pi n\big)^4 + (2\pi n)^2 a_0 - n^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l}a_{-n-l} + a_{n-l}a_{l-n})l^2}{l^4-n^4} \mp$$

$$\mp(2\pi n)^2 \Bigg(a_{-2n}a_{2n} + \frac{1}{4\pi^4}\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4-n^4}\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4-n^4}\Bigg) -$$

$$- \frac{a_{-2n}}{2\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l+n}a_{n-l}l^2}{l^4-n^4} - \frac{a_{2n}}{2\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l}l^2}{l^4-n^4}\Bigg)^{\frac{1}{2}} + \gamma_n n^2,$$

$$\widetilde{\lambda}_n = \big(2\pi n\big)^4 + (2\pi n)^2 a_0 + \beta_n n^2,$$

where (γ_n) *is a sequence summable with the power* $\frac{4}{3}$ *and* (β_n) *is a sequence summable with the power* 2.

For operator L_{ap} *we obtain the following asymptotic.*

$$\widetilde{\lambda}_n = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 -$$

$$-(2n+1)^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{(a_{n+l+1}a_{-(n+l+1)} + a_{n-l}a_{l-n})(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4} \mp$$

$$\mp (\pi(2n+1))^2 \Bigg(a_{-2n-1}a_{2n+1} + \frac{4}{\pi^4}\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg) \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg) - \frac{2a_{-2n-1}}{\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{n+l+1}a_{n-l}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4} -$$

$$- \frac{2a_{2n+1}}{\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{l-n}a_{-n-l-1}(2l+1)^2}{(2l+1)^4-(2n+1)^4}\Bigg)^{\frac{1}{2}} + \widetilde{\gamma}_n n^2,$$

$$\widetilde{\lambda}_n = \big(\pi(2n+1)\big)^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 + \widetilde{\beta}_n n^2,$$

where $(\widetilde{\gamma}_n)$ *is a sequence summable with the power* $\frac{4}{3}$, $(\widetilde{\beta}_n)$ *is a sequence summable with the power* 2 *and* a_k, $k \in \mathbb{Z}$, *are the Fourier coefficients.*

Theorem 2. *The operator* $-L_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$, *is a generator of an analytic semigroup.*

In the following theorem by $\widetilde{P}_n$, $n \geqslant m+1$, (the number m is large enough) denote the Riesz projector, which is constructed for the sets $\{\widetilde{\lambda}_n\}$ from spectrum $\sigma(L_{bc})$. If Ω is an arbitrary subset of $\mathbb{N}$, then $\widetilde{P}(\Omega) = \sum_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$ is the Riesz projector. This projector is constructed for the set $\{\widetilde{\lambda}_k, k \in \Omega\}$. Let $P(\Omega) = \sum_{k\in\Omega} P_k$. By $\widetilde{P}_{(m)}$ denote the Riesz projector constructed for spectral set $\widetilde{\sigma}_m$. Put $P_{(m)} = P_1 + \ldots + P_m$.

Theorem 3. *The system of the Riesz projectors $\widetilde{P}_n, n \in \mathbb{N}$, has the following property*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \frac{\widetilde{M}\,(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

where $k(\Omega) = \min_{k\in\Omega} k$ and $\widetilde{M} > 0$ is constant.

Criteria for interpolation with real nodes by the elements of invariant subspaces in the space of analytic functions in unbounded convex domain

S. G. Merzlyakov (ИМВЦ УНЦ РАН)
S. V. Popenov (ИМВЦ УНЦ РАН)

It is proved a criterion for interpolation with real nodes by the elements of invariant subspaces in the space of analytic functions in unbounded convex domain of the complex plane. Furthermore it is investigated such problem of interpolation by the series of exponentials. Necessary and sufficient conditions for such interpolation are given in the terms of location of exponents of exponential functions belonged to the considered invariant subspace.

For the space of all entire functions this interpolation problem was solved in [**1**] where it was found a new simple proof of the result from [**2**].

References

[**1**] Мерзляков С. Г., Попенов С. В., *Кратная интерполяция рядами экспонент в $H(C)$ с узлами на вещественной оси* // Уфимск. матем. журн. — 2013. — Т. 5, № 3. — С. 130–143. [**2**] Напалков В. В., Нуятов А. А., *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки* // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 2. — С. 77-86.

Rate of convergence of the sum square of singular numbers

E. Radzievskaya (National University of Food Technologies, Ukraine)

Let be A an integral operator of Hilbert–Schmidt with kernel $a(t,s)$ acting in the space $L_2[0;1]$ and let $s_k(A)$ its singular values. We establish that for all $r = 2, 3, ...$ the estimate

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \leqslant 2\omega^2 \left(\frac{1}{r-1}, a\right)_2$$

holds. Here $\omega(\delta, a)_2$ is the modulus of continuity of the kernel $a(t, s)$ given by the formulas

$$\omega(\delta, a)_2 := \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left(\int_0^1 \int_0^{1-h} |a(t+h, s) - a(t, s)|^2 \, dt \, ds \right)^{1/2}, \quad 0 < \delta \leqslant 1.$$

Also we have established similar estimates in terms of the modulus of continuity more then one order in the case, when domain of image of the operator A belongs to the space of continuity functions.

For all $m = 2, 3, \ldots$ the estimate

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \leqslant 25\omega_m^2 \left(\frac{2}{r}, a\right), \quad r = m+1, m+2, \ldots \tag{1}$$

holds. Here $\omega_m(\delta, a)$ is the modulus of continuity of the kernel $a(t, s)$ given by the formulas

$$\omega_m(\delta, a) := \sup_{\substack{f \in L_2 \\ \|f\|_2 = 1}} \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1-hm} \left| \sum_{q=0}^{m} (-1)^q C_m^q (Af)(t+hq) \right|.$$

The formula (1) yields the following proposition. Let the domain of values of the operator A belong to a space of continuous functions, and $m = 2, 3, \ldots$

$$s_r(A) \leqslant \left(\frac{10m}{r}\right)^{1/2} \omega_m \left(\frac{4}{r}, a\right), \quad r = m+1, m+2, \ldots$$

On spectral asymptotics of the mixed boundary value problems for the Sturm–Liouville equation with generalized Cantor type weight

N. V. Rastegaev (St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences)

Spectral asymptotics of the weighted Neumann problem for the Sturm–Liouville equation is considered. The weight is assumed to be the distributional derivative of a self-similar generalized Cantor type function. The spectrum is shown to have a periodicity property for a wide class of Cantor type self-similar functions. The weaker “quasi-periodicity” property is demonstrated under certain mixed boundary value conditions. This allows for a more precise description of the main term of the eigenvalue counting function asymptotics. Previous results by A. A. Vladimirov and I. A. Sheipak are generalized.

The research is supported by Russian Foundation for Basic Research (project 13-01-00172A) and by St. Petersburg State University grant N6.38.64.2012.

The method of similar operators in spectral analysis of differential operator with involution

E. Yu. Romanova (Voronezh State University)

Introduction. Let $L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ be the Hilbert space of all measurable $\mathbb{C}^m$-valued functions on $[0,\omega]$ whose norm is square-summable. The scalar product in $L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ is given by

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{m}(x_k,y_k),\quad x=(x_1,...,x_m),\quad y=(y_1,...,y_m)\in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m),$$

where $(x_k,y_k)=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x_k(\tau)\overline{y_k(\tau)}d\tau, k=1,...,m$ — scalar product in Hilbert space of complex functions from $L_2([0,\omega]$.

We will write $W_2^1([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ for the Sobolev space

$$\{y\in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m): y \text{ is absolutely continuous and } \dot{y}\in([0,\omega],\mathbb{C}^m)\}.$$

Consider the linear operator

$$L_{bc}: D(L_{bc})\subset L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)\to L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m),$$

generated by differential expression

$$l(y)=y'(x)-Q(x)y(\omega-x), x\in[0,\omega], Q\in L_2([0,\omega],\operatorname{End}\mathbb{C}^m). \qquad (1)$$

Its domain $D(L_{bc})$ is defined by one of the following boundary conditions bc:

(a) periodic (bc=per: $y(0)=y(\omega)$);

(b) anti-periodic (bc=ap: $y(0)=-y(\omega)$).

Thus, we put

$$D(L_{bc}) = \{y \in W_2^1([0,\omega],\mathbb{C}^m) : y \in bc\}$$

and denote the corresponding operators by L_{per}, L_{ap}.

We write the operator L_{bc} as

$$L_{bc}y = L_{bc}^0 y - By, \tag{2}$$

where $(L_{bc}^0 y)(x) = y'(x)$ is called free operator and plays the role of an unperturbed operator; $(By)(x) = Q(x)y(\omega-x), x \in [0,\omega], y \in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ is regarded as a perturbation.

One can easily describe the spectrum $\sigma(L_{bc}^0)$ of operator L_{bc}^0, which consists of eigenvalues

$$\lambda_n = i\frac{2\pi n}{\omega}, \quad bc = per;$$

and

$$\lambda_n = i\frac{\pi(2n+1)}{\omega}, \quad bc = ap, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

The corresponding eigenspace for each this operator is $E_n^0 = Span\{e_n^1, ..., e_n^m\}$, where

$$e_n^1 = e^{\lambda_n t}e_1, ..., e_n^m = e^{\lambda_n t}e_m,$$

$e_1, ..., e_m$ — standard basis in $\mathbb{C}^m$.

Riesz projections $P_n, n \in \mathbb{Z}$, have built over the sets $\{\lambda_n\}$, for any $x \in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$, can be described as

$$P_n x(t) = \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\right)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Main results. We study spectral properties of differential operator with involution using the method of similar operators. The main results are contained in the following theorems.

Theorem 1. *The operator L_{bc} is operator with compact resolvent. There is the numeration of eigenvalues such that spectrum $\sigma(L_{bc})$ can be written as*

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma_{(l)} \bigcup \left(\bigcup_{|n| \geqslant l+1} \sigma_n \right), \tag{3}$$

where $\sigma_{(l)}$ *— finite set with the number of points is less than or equal to n* $2l+1$*;*

$$\sigma_n = \sigma\left(i\frac{2\pi n}{\omega}I_n - \Phi_n\right), \quad bc = per, \quad |n| \geqslant l+1;$$

$$\sigma_n = \sigma\left(i\frac{\pi(2n+1)}{\omega}I_n - \Phi_n\right), \quad bc = ap, \quad |n| \geqslant l+1.$$

In addition we have following estimation for weighed mean

$$\left|\lambda_{\Phi_n} - \frac{trQ_{2n} + tr(\frac{\omega}{2\pi i}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k}(Q_{2n+k})^2)}{m}\right| \leqslant \beta_n, \quad |n| \geqslant l+1,$$

where

$$\lambda_{\Phi_n} = \frac{tr\,\Phi_n}{m} = \frac{\lambda_n^{(1)} + \ldots + \lambda_n^{(m)}}{m} \text{ — weighed mean of operator}$$

$$\Phi_n = Q_{2n} + \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}(Q_{2n+k})^2 + \Lambda_n \in \operatorname{End}\mathbb{C}^m, \sum_{|n|\geqslant l+1} \|\Lambda_n\| < \infty,$$

$$\sigma(\Phi_n) = \{\lambda_n^{(1)}, \ldots, \lambda_n^{(m)}\}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\lambda_n^{(k)}\right|^2 < \infty.$$

Theorem 2. *There exists equiconvergence of spectral distributions for operators* L_{bc} *and* L^0_{bc}*:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(l)} + \sum_{|k|=l+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(l)} - \sum_{|k|=l+1}^{n} P_k\|_2 = 0,$$

where $P_{(l)} = \sum\limits_{k=1}^{l} P_k$*, a* $\widetilde{P}_{(l)}, \widetilde{P}_n$ *— spectral Riesz projection, that is built over operator* L_{bc} *and sets* $\sigma_{(l)}$*,* σ_n*,* $n \geqslant l+1$*, accordingly.*

References

[**1**] A. G. Baskakov, A. V. Derbushev, and A. O. Shcherbakov, *The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials* // Izvestiya: Mathematics. — V. 75, № 3. — P. 445–469.

Canonical functions of admissible measures in half-plane

N. Sadik (İstanbul University)

For an admissible measure in upper half-plane the concept of canonical function is entered. This concept is generalization of Nevanlinna canonical product for analytical in half-plane functions of a finite order. It is shown that for function which growth is defined by a proximate order in the sense of Butru, entered definition and Nevanlinna canonical product coincide.

On the interpolation of non-linear maps

A. M. Savchuk (Moscow Lomonosov University)

Let (X_0, X_1) and (Y_0, Y_1) be complex Banach couples and $X_1 \subset X_0$, $\|x\|_{X_0} \leqslant c\|x\|_{X_1}$. Let $X_\theta = [X_0, X_1]_\theta$ and $Y_\theta = [Y_0, Y_1]_\theta$ be the complex interpolation spaces for $0 < \theta < 1$. We consider an analytic map $\Phi : B(r, X_0) \to Y_0 + Y_1$ where $B(r, X_0)$ is the ball of radius r in X_0. Assuming that the maps $\Phi : B(r, X_0) \to Y_0$ and $\Phi : B(c^{-1}r, X_1) \to Y_1$ are continuous and bounded by constants M_0 and M_1, respectively, we prove that the map $\Phi : B(c^{-\theta}r, X_\theta) \to Y_\theta$ is well defined and bounded by $M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. We also find conditions when these maps are analytic for $\theta \in (0, 1]$. A new feature is that a function Φ is defined only locally but not on the whole spaces X_0 and X_1.

The talk is based on the joint works with T. Kappeler, A. A. Shkalikov and P. Topalov.

Magnetic Bloch theory and non-commutative geometry

A. G. Sergeev (Steklov Mathematical Institute)

We present an interpretation of magnetic Bloch theory in terms of noncommutative geometry by formulating the properties of magnetic Schrödinger operator in terms of C^*-algebras.

As an application of this noncommutative version of Bloch theory we derive a mathematical interpretation of the quantum Hall effect in terms of noncommutative geometry.

Geometrical and Statistical Properties of Evolution Equations on Singular Spaces

A. I. Shafarevich (Moscow State University)

We study evolution equations (namely, time-dependent Schrödinger equation and wave equation) on singular spaces. These spaces consist of a number of two- or three-dimensional manifolds, connected by a number of segments. For simplest cases we obtain explicit formulae for the solutions of the Cauchy problems. In general situation we study asymptotic solutions in the form of Gaussian packets and generalized Gaussian packets. We give local geometrical description of such solutions and study global statistical properties of the number of packets. In particular, we show that the evolution of the number of packets is connected with the geometric properties of the corresponding singular space. Under certain additional assumptions we compute the asymptotics of this number as time tends to infinity; the corresponding problem is closely connected with the problems of analytic number theory.

The Cauchy problem for one singular wave equation

E. L. Shishkina (Voronezh State University)

Let

$$\mathbb{R}_n^+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_n,\quad x_1>0,\ldots,x_n>0\}$$

and multi-index $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ consists of fixed numbers $\gamma_i>0$, $i=1,...,n$, $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

The multidimensional generalized translation T_x^y is defined by

$$T_x^y f(x)=T_{x_1}^{y_1}...T_{x_n}^{y_n}f(x),\qquad x\in\mathbb{R}_n^+, \tag{1}$$

where $T_{x_i}^{y_i}$, $i=1,...,n$ is the generalized translation (see [**1**]):

$$T_{x_i}^{y_i}f(x)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi} f(x_1,...,x_{i-1},\sqrt{x_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i+y_i^2},x_{i+1},...,x_N)\times$$

$$\times\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i d\varphi_i.$$

Weighted spherical mean generated by a multidimensional generalized translation (1) has the form (see [**2, 3**])

$$M_r^\gamma f(x)=\frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(n)} T_x^{ry}f(x)y^\gamma dS,\quad y^\gamma=y_1^{\gamma_1}\ldots y_n^{\gamma_n},$$

where $S_1^+(n)=\{x\in\mathbb{R}_n^+:|x|=1\}$ and $|S_1^+(n)|_\gamma=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}$ (see [**4**]).

Theorem. *Let $f(x)$ be a continuous function in $\mathbb{R}_n^+$, $n+|\gamma|-\delta+1>0$, $\delta>0$ then the solution of the Cauchy problem*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\delta}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u(x,t),$$

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=0,$$

is given by

$$u(x,t) = \frac{2\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \left[q^{\frac{1-\delta}{2}} \left(D_z^{\frac{n+|\gamma|-\delta+1}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{z}} r^{n+|\gamma|-1}\, M_r^\gamma f(x) dr \right) (q) \right]_{q=t^2} .$$

References

[**1**] B. M. Levitan, *Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions* // Uspekhi Mat. Nauk. — 1951. — V. 6, № 2 (42). — P. 102–143. [**2**] I. A. Kipriyanov, Yu. V. Zasorin, *Fundamental Solution of the Wave Equation with Several Singularities and the Huygens Principle* // Differ. Uravn. — 1992. — V. 28, № 3. — P. 452–462. [**3**] L. N. Lyakhov, I. P. Polovinkin, and E. L. Shishkina, *On a Kipriyanov Problem for a Singular Ultrahyperbolic Equation* // Differ. Uravn. — 2014. — V. 50, № 4. — P. 516–528. [**4**] L. N. Lyakhov, *Weight Spherical Functions and Riesz Potentials Generated by Generalized Shifts* // Voronezh. Gos. Tekhn. Univ., Voronezh, 1997.

Spectral Properties of Strongly Elliptic Functional Differential Equations

A. L. Skubachevskii (People's Friendship University of Russia)

Strongly elliptic functional differential operators in a bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^n$ can be defined with the help of Garding inequality. We shall formulate the necessary and sufficient conditions of strong ellipticity in algebraic form. A spectrum of strongly elliptic functional differential equations is discrete and sectorial, a system of eigenfunctions is complete in the space $L_2(Q)$ and eigenvalues have the Weyl asymptotics. A smoothness of generalized solutions can be violated on a set that is dense in Q. This astonishing property allows to construct a new nontrivial class of sectorial operators satisfying the Kato square root problem.

This work was partially supported by RFBR, project № 14-01-00265.

References

[**1**] A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Basel–Boston–Berlin, Birhhäuser, 1997.

On strongly elliptic conditions for quasilinear differential-difference operators

O. V. Solonukha (Central Economical Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences)

Let $Q \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with a boundary $\partial Q \in C^\infty$, or let $Q = (0,d) \times G$ where $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ be a bounded domain (with a boundary $\partial G \in C^\infty$ if $n \geqslant 3$).

Let us consider the boundary value problem

$$\begin{gathered} \mathcal{A}Ru(x) = f(x) \quad (x \in Q), \\ u(x) = 0 \quad (x \notin Q). \end{gathered} \tag{1}$$

Here

$$\mathcal{A}u(x) = -\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \partial_i A_i \left(x, u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u\right),$$

where A_i are sufficiently smooth functions,

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h),$$

$\mathcal{M}$ is a finite set of vectors with integer coordinates, $a_h \in \mathbf{R}$ (similarly we can consider the case of commensurable shifts).

We assume that $\mathcal{A}$ satisfies the conditions of strong ellipticity from [**1**] and strongly positive matrices correspond to R (as it is considered for linear elliptic differential-difference equations in [**2**]). Then $\mathcal{A}R$ is srtongly elliptic too. Thus, problem (1) has a unique solution.

This wort is partially supported by RFBR, Grant № 12-01-00524.

References

[**1**] Dubinskii Yu. A., *Nonlinear elliptic and parabolic equations* // Itogi nauki i techniki: VINITI. Sovremennie problemy matematiki. — 1976. — V. 9. — P. 5–130; English transl.: in J. of Soviet Mathematics. — 1979. — V. 12, № 5. [**2**] Skubachevskii A. L., *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1997.

Embedding of weighted Sobolev spaces on the real line

V. D. Stepanov (Peoples Friendship University of Russsia)

We analyse characterization of an embedding inequality of Sobolev type and boundedness criteria for the Hardy–Steklov integral operator in weighted Lebesgue spaces.

Operator-theoretic approach to homogenization of periodic differential operators

T. A. Suslina (St. Petersburg State University)

In $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, we study elliptic selfadjoint second order differential operators given by

$$\mathcal{B}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

$\varepsilon > 0$. Here we use the notation $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$ for any function in $\mathbb{R}^d$. All the coefficients are matrix-valued: g is of size $m \times m$; a_j, Q, and Q_0 are of size $n \times n$. We assume that $g(\mathbf{x})$ and $Q_0(\mathbf{x})$ are bounded and uniformly positive definite; $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l$, where b_l are constant $(m \times n)$-matrices. It is assumed that $m \geqslant n$ and $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ for $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. The coefficients $g(\mathbf{x})$, $a_j(\mathbf{x})$, $Q(\mathbf{x})$, and $Q_0(\mathbf{x})$ are periodic with respect to some lattice. Next, let $a_j \in L_{2p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $Q \in L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, where $p = 1$ for $d = 1$, $p > d/2$ for $d \geqslant 2$. The parameter $\lambda > 0$ is chosen so that the operator $\mathcal{B}_\varepsilon$ is positive definite.

For small ε the coefficients of $\mathcal{B}_\varepsilon$ are rapidly oscillating. We find approximations of the inverse operator $\mathcal{B}_\varepsilon^{-1}$ in different operator norms.

Theorem 1. *For $0 < \varepsilon \leqslant 1$ we have выполнены точные по порядку оценки*

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^{-1} - (\mathcal{B}^0)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 \varepsilon,$$
$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^{-1} - (\mathcal{B}^0)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2 \varepsilon^2,$$
$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^{-1} - (\mathcal{B}^0)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3 \varepsilon.$$

Here $\mathcal{B}^0$ is the effective operator with constant coefficients, $K(\varepsilon)$ and $K_1(\varepsilon)$ are appropriate correctors.

These estimates are order sharp, the constants are controlled in terms of the problem data. The results are applied to the magnetic Schrödinger operator and twodimensional Pauli operator with singular rapidly oscillating potentials.

The method is based on the scaling transformation, the Floquet–Bloch theory and the analytic perturbation theory. We suggest an abstract operator-theoretic scheme. In the framework of this scheme, a two-parametric quadratic operator pencil $B(t, \varepsilon)$ is studied. (The parameter t is the modulus of quasimomentum.) Using the analytic perturbation theory with respect to the one-dimensional parameter $\tau = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$, we find the required approximations for the inverse operator $B(t,\varepsilon)^{-1}$.

The results were obtained in [**1**, **2**], and in the case where $a_j = 0$ and $Q = 0$ in the previous papers by M. Birman and the author.

References

[**1**] Suslina T. A., *Homogenization in the Sobolev class $H^1(\mathbb{R}^d)$ for second order periodic elliptic operators with the inclusion of first order terms* // St. Petersburg Math. J. — 2011. — V. 22, № 1. — P. 81–162. [**2**] Suslina T. A., *Homogenization of elliptic systems with periodic coefficients: operator error estimates in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with the corrector taken into account* // St. Petersburg Math. J., to appear.

Peakon asymptotics for the dispersionless Camassa-Holm equation

G. Teschl (University of Vienna)

We discuss direct and inverse spectral theory for the isospectral problem of the dispersionless Camassa-Holm equation, where the weight is allowed to be a finite signed measure. In particular, we prove that this weight is uniquely determined by the spectral data and solve the inverse spectral problem for the class of measures which are sign definite. The results are applied to deduce several facts for the dispersionless Camassa-Holm equation. In particular, we show that initial conditions with integrable momentum asymptotically split into a sum of peakons as conjectured by McKean.

Perturbation and spectral theory for J-non-negative operators

C. Trunk (TU Ilmenau, Germany)

We present recent developments for J-non-negative operators in spaces with an indefinite metric. More precisely, we consider a Hilbert space $\mathcal{H}$ with positive definite inner product $(\cdot,\cdot)$ and a self-adjoint, bounded operator J with $J^2 = I$ which serves as the Gramian of

$$[x, y] := (Jx, y) \quad \text{for } x, y \in \mathcal{H}.$$

It is usual, to call the tuple $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ a *Krein space*. A densely defined operator in $\mathcal{H}$ is called *J-non-negative*, if it has a non-empty resolvent set and satisfies for all x in its domain

$$[Ax, x] \geq 0.$$

It is well-known that the spectrum of such an operator is real and that there exists a spectral function with (possible) singularities at 0 and ∞, see [**1**, **2**, **5**]. In the talk we will discuss various spectral properties like Jordan chains or the numerical range. Main focus of the talk is the description of the spectrum after a one-dimensional perturbation: we will give bounds on the lengths of Jordan chains, bounds for the non-real spectrum and the number of eigenvalues in gaps of the essential spectrum.

J-non-negative operators appear in the study of operator polynomials (e.g. [**3**, **4**]) and indefinite Sturm–Liouville equations, see, e.g. [**6**]. Currently much effort is devoted to inverse spectral problems related to left-definite Sturm–Liouville problems and the Camassa–Holm equation.

References

[**1**] T. Ando, *Linear Operators in Krein Spaces*, Sapporo, Japan 1979. [**2**] T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1989. [**3**] J. Bognar, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer, 1974. [**4**] M. G. Krein, *Introduction to the theory of indefinite J-spaces and to the theory of operators in those spaces* // Amer. Math. Soc. Transl. — 1970. — V. 93, № 2. — P. 103–176. [**5**] H. Langer, *Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces* // Lecture Notes in Mathematics. — 1982. — V. 948. — P. 1–46. [**6**] A. Zettl, *Sturm–Liouville Theory*, AMS, Providence, RI, 2005.

Widths of weighted Sobolev classes that are functions of the distance to some h-set: limiting cases

A. A. Vasil'eva (Moscow State University)

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded domain, let $g,\ v : \Omega \to (0, \infty)$ be measurable functions, $r \in \mathbb{N}$. For any distribution f defined on Ω we write $\nabla^r f = \left(\partial^r f/\partial x^{\overline{\beta}}\right)_{|\overline{\beta}|=r}$, and denote by $l_{r,d}$ the number of components of the vector-valued distribution $\nabla^r f$. We call the set $W^r_{p,g}(\Omega) = \{f :\ \Omega \to \mathbb{R}\big|\ \exists \psi :\ \Omega \to \mathbb{R}^{l_{r,d}},\ \|\psi\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 1,\ \nabla^r f = g \cdot \psi\}$ a weighted Sobolev class. A weighted Lebesgue space is defined by $L_{q,v}(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}|\ \ \|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} < \infty\right\}$, where $\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)}=\|fv\|_{L_q(\Omega)}$.

We denote by $\mathbb{H}$ the set of all nondecreasing positive functions defined on $(0, 1]$. Let $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ be a nonempty compact set and $h \in \mathbb{H}$. We say that Γ is an h-set if there are a constant $c_* \geqslant 1$ and a finite countably additive measure μ on $\mathbb{R}^d$ such that $\operatorname{supp}\mu = \Gamma$ and $c_*^{-1}h(t) \leqslant \mu(B_t(x)) \leqslant c_* h(t)$ for any $x \in \Gamma$, $t \in (0, 1]$.

Let $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$, let $\Omega \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ be a John domain, let $h(t) = t^\theta |\log t|^\gamma \tau(|\log t|)$ in some neighborhood of the zero, $0 < \theta < d$, $g(x) = \varphi_g(\mathrm{dist}\,(x, \Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\mathrm{dist}(x, \Gamma))$, $\varphi_g(t) = t^{-\beta_g}|\log t|^{-\alpha_g}\rho_g(|\log t|)$, $\varphi_v(t) = t^{-\beta_v}|\log t|^{-\alpha_v}\rho_v(|\log t|)$. Here ρ_g, ρ_v, τ are absolutely continuous functions such that $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y\tau'(y)}{\tau(y)} = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y\rho_g'(y)}{\rho_g(y)} = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y\rho_v'(y)}{\rho_v(y)} = 0$. Let $\beta_v = \frac{d-\theta}{q}$ and $\alpha_v > \frac{1-\gamma}{q}$.

We set $\beta = \beta_g + \beta_v$, $\alpha = \alpha_g + \alpha_v$, $\rho(y) = \rho_g(y)\rho_v(y)$.

In estimating Kolmogorov, linear, and Gelfand widths we set, respectively, $\vartheta_l = d_l$ and $\hat{q} = q$, $\vartheta_l = \lambda_l$ and $\hat{q} = \min\{q, p'\}$, $\vartheta_l = d^l$ and $\hat{q} = p'$.

Theorem. *Let $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ = 0$. We set $\alpha_0 = \alpha - \frac{1}{q}$ for $p < q$, $\alpha_0 = \alpha - 1 - (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ for $p \geqslant q$. Suppose that $\alpha_0 > 0$. Then*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \asymp (\log n)^{-\alpha_0}\rho(\log n)\tau^{-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}(\log n).$$

One-dimensional model spectral problem arising in theory of metamaterials

V. I. Voytitsky (Taurida National University of V. I. Vernadsky, Simferopol, Russia)

D. A. Zakora (Taurida National University of V. I. Vernadsky, Simferopol, Russia)

Let $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $(0 \leqslant \arg\alpha < \arg\beta < \pi)$ are given constants and $\lambda \in \mathbb{C}$ are unknown spectral parameter. We consider the following spectral transmission problem for the three intervals

$$\begin{gathered}
-\alpha u_1''(x) = \lambda u_1(x), \qquad x \in (-R; -l), \\
-\beta u_2''(x) = \lambda u_2(x), \qquad x \in (-l; l), \\
-\alpha u_3''(x) = \lambda u_3(x), \qquad x \in (l; R), \\
u_1(0) = u_2(0), \qquad u_2(l) = u_3(l), \\
\alpha u_1'(-l) = \beta u_2'(-l), \qquad \beta u_2'(l) = \alpha u_3'(l), \\
u_1(-R) = u_3(R) = 0.
\end{gathered}$$

This problem for $\alpha = 1$, $\beta = -1 + i\varepsilon$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ is a one-dimensional stationary model generated by the problem of the solutions for the electromagnetic fields in a coated cylinder where the core radius is bigger than the shell radius (see [**1**] and [**2**]).

For $R < \infty$ we prove that the problem has a discrete spectrum with unique limit point at infinity situated in the sector $\arg\beta \leqslant \arg\lambda \leqslant \arg\alpha$. For any given $\delta > 0$ there exists the number $R(\delta) > 0$ such that for $[\lambda] > R(\delta)$ we have no eigenvalues in the sector $\arg\alpha + \delta \leqslant \arg\lambda \leqslant \arg\beta - \delta$. In polar coordinate system we have a branch of eigenvalues $\{\lambda_n^{(1)}\}$ tending asymptotically to some points on parabola with the axis of symmetry $\varphi = \arg\beta$ and two branches $\{\lambda_n^{(2,3)}\}$ of eigenvalues tending asymptotically to points on another parabola with the axis of symmetry $\varphi = \arg\alpha$. We find explicit asymptotic formulas of these branches for $n \to \infty$ and establish its dependence on the parameter $\varepsilon \to +0$ in the special case $\alpha = 1$, $\sqrt{\beta} = i + \varepsilon$.

For $R = \infty$ discrete part of the spectrum coincide with the branch $\{\lambda_n^{(1)}\}$ which one can evaluate by its asymptotic formulas. Another two branches $\{\lambda_n^{(2,3)}\}$ transform to points of continuous spectrum. Preliminary estimates show that it coincides with the ray $\varphi = \arg\alpha$.

References

[**1**] G. W. Milton, N.-A. P. Nicorovici, R. C. McPhedran and others, *Solutions in folded geometries, and associated cloaking due to anomalous resonance* // New Journal of Physics. — 2008. — V. 10. — P. 1–22. [**2**] O. P. Bruno and S. Lintner, *Superlens-cloaking of small dielectric bodies in the quasistatic regime* // Journal of applied physics 102, 124502, 2007.

Идентификация параметров заземления провода по собственным частотам колебаний переменного тока

З. Ф. Аксенова (Финансовый университет при Правительстве РФ, Уфимский филиал)

Рассмотрим граф G в виде звезды из n проводов с одним общим концом в нуле. Длина i-го провода равна l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Каждый i-й провод заземлен через параллельное соединение сосредоточенной самоиндукции L_i и емкости конденсатора C_i. Требуется определить емкость конденсатора по первым собственным частотам колебаний переменного тока и известному набору значений индуктивности катушки. Представлен метод решения этой задачи. Приведены соответствующие примеры. Полученные результаты позволяют диагностировать условия заземления электрических сетей на участках труднодоступных для визуального осмотра, а так же подбирать условия заземления для обеспечения нужного спектра частот колебаний переменного тока.

О простоте собственных чисел одного класса несамосопряженных операторов

Т. С. Алероев (НИУ МГСУ)

В пространстве $L^2(0,1)$ рассматривается оператор

$$A_\rho(u) = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int\limits_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)dt - \int\limits_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1}(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt\right],$$

где $0 < \rho < 2$. Исследуя уравнение

$$(A_\rho - \lambda E)^n \varphi = 0$$

доказывается, что этот оператор не имеет присоединенных функций.

Полнота собственных функций методом Б. М. Левитана для оператора Штурма–Лиувилля в дивергентном виде

А. Р. Алиев (Бакинский государственный университет)
Э. Х. Эйвазов (Бакинский государственный университет)

Математические модели некоторых прикладных проблем, связанных с решением задач теплопередачи, массообмена, динамики жидкости, диффузии, электричества и магнитизма, описываются оператором Штурма–Лиувилля в дивергентном виде.

Точное решение задачи на собственные значения оператора Штурма–Лиувилля (вообще говоря, дифференциальных операторов) можно найти только в редких случаях. Поэтому для решения таких задач применяются различные приближенные методы. Среди этих методов наиболее применимы разностные методы.

Впервые метод конечных разностей для изучения краевых задач для уравнения второго порядка был применен Планшерелем. Он доказал, что собственные значения и собственные векторы конечно-разностной задачи сходятся к собственным значениям и собственным функциям дифференциальной задачи. Первым же полноту собственных функций задачи Штурма-Лиувилля с помощью метода конечных разностей доказал Б. М. Левитан (см. [**1**]).

В настоящей работе доказывается самосопряженность конечно-разностных схем в общем виде. Используя этот результат, устанавливается самосопряженность конечно-разностных схем, соответствующих уравнению Штурма–Лиувилля в дивергентном виде с различными граничными условиями. Изучается аппроксимация и сходимость метода, а также свойства собственных значений и собственных векторов разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение и граничные условия. Методом Б. М. Левитана доказывается полнота собственных функций оператора Штурма–Лиувилля в дивергентном виде.

Литература

[**1**] Левитан Б. М., *Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка.* М.: Гостехиздат, 1950.

Обращение интегральных операторов методом операторных тождеств

Е. А. Аршава (Харьковский национальный университет строительства и архитектуры)

Постановка общей проблематики и анализ публикаций по теме исследования. Метод операторных тождеств был впервые применен В. А. Амбарцумяном при изучении проблем астрофизики [**1**]. Затем В. В. Соболев [**2**], В. В. Иванов [**3**] применили коммутационные соотношения для решения интегральных уравнений, которые возникают в задачах переноса излучения и рассеивания света. В этих работах использовалась связь интегрального оператора с разностным ядром и оператора дифференцирования, т. е. в коммутационном соотношении присутствовал неограниченный оператор. Такой подход приводил к существенным трудностям при построении общей математической теории. Наиболее весомый вклад в разработку представленной тематики сделал Л. А. Сахнович [**4**]. Было предложено вместо оператора дифференцирования использовать несамосопряженный оператор интегрирования. При этом Л. А. Сахновичем рассматривался класс уравнений вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^{\omega} S(x-t)f(t)dt = \varphi(x), \tag{1}$$

который является наиболее общим классом уравнений с разностным ядром. Это дало возможность Л. А. Сахновичу с единой точки зрения исследовать различные виды уравнений с разностным ядром как первого, так и второго рода. Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора. В работах И. И. Кальмушевского [**5**], А. Б. Нерсесяна [**6**], А. Л. Сахновича [**7**], А. А. Янцевича, В. А. Золотарева [**8**] и др. метод операторных тождеств использовался при изучении систем интегральных уравнений с разностным ядром, сумматорных уравнений с матрицей коэффициентов Тёплица, двумерных интегральных уравнений. Целью представленной публикации является обобщение метода операторных тождеств для обращения других классов интегральных операторов. Перейдем к изложению основных результатов, полученных автором статьи.

Построение обратного оператора. Рассмотрим задачу обращения оператора вида

$$Sf = L_x(\alpha) \int\limits_0^\omega S(x,t) f(t) dt, \tag{2}$$

с ядром $S(x,t)$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$(L_x(\alpha) - L_t(\alpha)) S(x,t) = 0, \qquad L_x(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \alpha = \overline{\alpha} \neq 0, \tag{3}$$

Теорема 1. *Для любого ограниченного оператора вида* (2) *с ядром, которое удовлетворяет условиям* (3), *имеют место соотношения:*

$$(A_0 S - S A_0^*) f = \int_0^\omega \Bigg(M_1(x) + \\ + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} M_2(x) + M_3(t) + \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} M_4(t) \Bigg) f(t)\ dt, \tag{4}$$

где

$$A_0 = L_x^{-1}(\alpha), \quad M_1(x) = S(x,0), \quad M_2(x) = S'(x,0), \quad M_3(t) = -S(0,t), \\ M_4(t) = -S'(0,t), \quad f(t) \in L_2(0,\omega).$$

Следствие. *Если оператор S имеет ограниченный обратный T, тогда верно представление*

$$(T A_0 - A_0^* T) f = \int_0^\omega R(x,t) f(t)\ dt,$$

где $R(x,t) = \sum_{i=1}^{4} P_i^*(t)Q_i(x)$*, кроме того, для* $P_i(t), Q_i(x), 1 \leqslant i \leqslant 4$*, выполняются соотношения вида*

$$\begin{cases} S^*P_1 = 1, \quad S^*P_2 = M_3^*(t), \quad S^*P_3 = M_4^*(t), \quad S^*P_4 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}, \\ SQ_1 = M_1(x), \quad SQ_2 = 1, \quad SQ_3 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}, \quad SQ_4 = M_2(x). \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. *Если оператор* S *ограничен вместе со своим обратным и существуют функции* $P_i(t), Q_i(x), 1 \leqslant i \leqslant 4$*, которые удовлетворяют соотношениям* (5)*, тогда для оператора* $T = S^{-1}$ *имеет место интегральное представление*

$$Tf = L_x(\alpha) \int_0^{\omega} f(t) L_t(-\alpha) \Phi(x,t)\, dt,$$

где $\Phi(x,t)$ *выражается через ядро оператора* $R = TA_0 - A_0^*T$*,* $f(t) \in L_2(0,\omega)$*.*

Полученные результаты переносятся на случай обобщённых функций вида:

$$f(x) = \gamma\delta(x) + \beta\delta(\omega - x) + g(x), g(x) \in L_2(0,\omega),$$

$\delta(x)$ — дельта–функция Дирака.

Литература

[**1**] Амбарцумян В. А., *Научные труды.* Ереван, 1960. [**2**] Соболев В. В., *Рассеяние света в атмосферах планет.* М.: Наука, 1972. [**3**] Иванов В. В., *Перенос излучения и спектры небесных тел.* М.: Наука, 1969. [**4**] Сахнович Л. А., *Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке* // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 35, № 4 (214). — С. 69–129. [**5**] Кальмушевский И. И., *О решении некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов* // Дифференциальные уравнения. Математика. — 1980. — Т. 16, № 5. — С. 941–943. [**6**] Нерсесян А. Б., Чернявская Н. А., *Об обращении интегральных операторов с почти разностным ядром* // ДАН Арм. ССР. — 1984. — Т. 79, № 1. — С. 10–14. [**7**] Сахнович А. Л., *Обращение операторов, удовлетворяющих двум операторным тождествам* // Одесса, Ин-т гидромеханики. Деп. в ВИНИТИ № 4954 — В 86, 1986. [**8**] Ю. Г. Стоян, В. А. Золотарев, А. А. Янцевич и др. *Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений* // АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; 332, Харьков, 1990. Препринт.

О единственности решения задачи восстановления краевых условий

А. М. Ахтямов (БашГУ, ИМех УНЦ РАН)

Рассматривается следующая спектральная задача:

$$y^{(4)} = \lambda^4\, y,$$

$$U_1(y) = y(0) = 0, \quad U_2(y) = y'(0) = 0, \quad U_3(y) = 0, \quad U_4(y) = 0,$$

где

$$U_3(y) = a_{11}\, y'''(1) + \left(a_{15} - a_{16}\, \lambda^4\right)\, y(1) = 0,$$
$$U_4(y) = a_{22}\, y''(1) + \left(a_{23} - a_{24}\, \lambda^4\right)\, y'(1) = 0$$

— линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x = 1$. Эта задача возникает при решении задачи о колебаниях длинного однородного стержня, левый конец которого закреплен, а на правом конце реализуется один из следующих видов закрепления: 1) заделка; 2) свободное опирание; 3) свободный конец; 4) плавающая заделка; 5) различные виды упругого закрепления (упругая заделка, упругое опирание и т.п.); 6) сосредоточенная масса на конце; 7) сосредоточенный инерционный элемент на конце. Исходя из физического смысла задачи (основных типов граничных условий на правом конце, описанных выше) имеем: $a_{11} \geqslant 0$, $a_{15} \geqslant 0$, $a_{16} \geqslant 0$, $a_{22} \geqslant 0$, $a_{23} \geqslant 0$, $a_{24} \geqslant 0$.

Можно положить также, что из неравенства $a_{16} \neq 0$ следует неравенство $a_{11} \neq 0$, а из неравенства $a_{24} \neq 0$ следует $a_{22} \neq 0$.

К рассмотренной спектральной задаче ставится обратная задача: по собственным частотам изгибных колебаний стержня найти неизвестные краевые условия $U_3(y) = 0$, $U_4(y) = 0$.

Что же означает найти краевые условия? На первый взгляд может показаться, что это означает, что нужно найти все коэффициенты a_{ij}. Однако это ошибочное утверждение. Дело в том, что одно и то же краевое условие может иметь совершенно разные коэффициенты. Например, условия $y'''(1) = 0$ и $5\, y'''(1) = 0$ имеют совершенно разные коэффициенты a_{11}. В первом случае это 1, а во втором — это 5. Однако эти коэффициенты соответствуют одному и тому же краевому условию. Поэтому нужно искать матрицу $A = \|a_{ij}\|$ с точностью до линейных преобразований строк, а не сами коэффициенты.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$ через A:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & -a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & -a_{24} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Через M_{ij} обозначим миноры второго порядка этой матрицы, составленные из ее i-го j-го столбцов:

$$M_{12} = a_{11}\, a_{22}, \quad M_{13} = a_{11}\, a_{23}, \quad M_{14} = -a_{11}\, a_{24}, \quad M_{15} = 0, \quad M_{16} = 0,$$
$$M_{23} = 0, \quad M_{24} = 0, \quad M_{25} = -a_{15}\, a_{22}, \quad M_{26} = a_{16}\, a_{22},$$
$$M_{34} = 0, \quad M_{35} = -a_{15}\, a_{23}, \quad M_{36} = a_{16}\, a_{23},$$
$$M_{45} = a_{15}\, a_{24}, \quad M_{46} = -a_{16}\, a_{24}, \quad M_{56} = 0.$$

В терминах матрицы A отыскание форм $U_3(y)$, $U_4(y)$ равносильно нахождению матрицы A с точностью до линейных преобразований ее строк.

Поэтому поставленная выше обратная задача восстановления краевых условий может быть может быть сформулирована следующим образом: *коэффициенты a_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$ — неизвестны; ранг матрицы A равен двум; известны отличные от нуля собственные значения λ_k спектральной задачи; требуется восстановить матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.*

Характеристический определитель спектральной задачи имеет вид

$$\Delta(\lambda) \equiv M_{12}\, f_{12}(\lambda) + M_{13}\, f_{13}(\lambda) + M_{14}\, f_{14}(\lambda) + M_{25}\, f_{25}(\lambda) + \\ + M_{26}\, f_{26}(\lambda) + S_{36}\, f_{36}(\lambda) + M_{35}\, f_{35}(\lambda) + M_{46}\, f_{46}(\lambda),$$

где

$$f_{12}(\lambda) = -\frac{1}{2}\,(1 + \cos\lambda\, \operatorname{ch}\lambda)\,;$$
$$f_{13}(\lambda) = -\frac{1}{2\,\lambda}\,(\sin\lambda\, \operatorname{ch}\lambda + \cos\lambda\, \operatorname{sh}\lambda)\,; \quad f_{14}(\lambda) = \lambda^4\, f_{13}(\lambda);$$
$$f_{25}(\lambda) = \frac{1}{2\,\lambda^3}\,(\cos\lambda\, \operatorname{sh}\lambda - \sin\lambda\, \operatorname{ch}\lambda)\,; \quad f_{26}(\lambda) = \lambda^4\, f_{25}(\lambda);$$
$$f_{35}(\lambda) = \frac{1}{2\,\lambda^4}\,(\cos\lambda\, \operatorname{ch}\lambda - 1)\,; \quad f_{36}(\lambda) = \lambda^4\, f_{35}(\lambda); \quad f_{46}(\lambda) = \lambda^8\, f_{35}(\lambda),$$

а $S_{36} = M_{36} + M_{45}$. Если подставить в последнее уравнение поочередно 6 собственных значений спектральной задачи, то получим систему 6 уравнений от 6 неизвестных коэффициентов a_{11}, a_{15}, a_{16}, a_{22}, a_{23}, a_{24}.

Относительно этих неизвестных система оказывается нелинейной и имеет неединственное решение. Сколько же нужно брать собственных значений для однозначного восстановления краевых условий?

Заметим, что хотя эта система нелинейна относительно коэффициентов, она линейна относительно миноров матрицы. Используя это, а также условия Плюккера, возникающие при восстановлении матрицы по ее минорам, доказывается, что для единственности решения задачи восстановления краевых условий (отыскания матрицы A с точностью до линейных преобразований строк) достаточно 7 собственных значений.

Вообще же при для получения единственности восстановления краевых условий количество собственных значений, достаточных для однозначности восстановления краевых условий, как правило на единицу меньше, чем количество линейно независимых функций в разложении характеристического определителя. Для рассматриваемой обратной задачи количество собственных значений, достаточных для однозначности восстановления краевых условий, равно 7, так как линейно независимых функций в разложении характеристического определителя восемь (это функции $f_{12}(\lambda)$, $f_{13}(\lambda)$, $f_{14}(\lambda)$, $f_{25}(\lambda)$, $f_{26}(\lambda)$, $f_{36}(\lambda)$, $f_{35}(\lambda)$, $f_{46}(\lambda)$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-97010-р_поволжье_а).

Идентификация условий закрепления одного из концов балки Эйлера–Бернулли по пяти собственным частотам ее колебаний

А. А. Ахтямова (ИМех УНЦ РАН)

С быстрым развитием техники, на сегодняшний день, стало важным изучение процессов протекающих в различных механических системах. Особую значимость имеют колебания и вибрации, которые в силу непредвиденности могут вызвать погрешности в работе машин или устройствах, увеличить износ и заметно понизить надежность, возможны также разрушения и аварии. В связи с этим интенсивно развивается акустическое диагностирование, решающее задачи оперативного контроля технических конструкций, по собственным частотам ее колебаний.

Деталями многих механизмов являются стержни. Если конец стержня недоступен для визуального осмотра, а разборка механизма представляет собой дорогостоящую процедуру, то для сохранения надежной работы механизма возникает потребность в его ранней и неразрушающей диагностике (например, акустической), то есть возникает задача идентификации условий закрепления стержня по характеристикам звуковых колебаний, вызванных ударом по стержню.

В представленной работе рассматривается задача идентификации условий закрепления одного из концов балки по пяти собственным частотам ее колебаний. На основе условий Плюккера, возникающих при восстановлении матрицы по ее минорам максимального порядка, построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А. Н. Тихонову. Найдено явное решение задачи идентификации матрицы краевых условий, выписанное в терминах характеристического определителя соответствующей спектральной задачи. Приведены соответствующие примеры.

Литература

[**1**] Ахтямов А. М., Муфтахов А. В., Ямилова Л. С., *Определение вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний* // Акустический журнал. — 2008. — Т. 54, № 2. — С. 181–188. [**2**] Ахтямов А. М., Урманчеев С. Ф., *Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний* // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 19–24.

Некоммутативная геометрия и томография многообразий

М. И. Белишев (ПОМИ РАН; СПбГУ)

В обратных задачах на многообразиях требуется восстановить риманово многообразие (Ω, g) с краем Γ по его граничным данным. Роль данных играет оператор реакции R, формализующий измерения, производимые внешним наблюдателем на Γ. Примеры из приложений — задачи импедансной, акустической и электромагнитной томографии (ИТ, АТ и ЭМТ). С физической точки зрения они различаются инструментом зондирования: в ИТ это внутренние токи, индуцированные в Ω потенциалом, приложенным к Γ, в АТ и ЭМТ — волны, инициированные источниками на Γ и распространяющиеся внутри Ω с конечной скоростью.

По одному из основных тезисов некоммутативной геометрии, топологическим пространствам отвечают алгебры, эти пространства характеризующие. Применительно к обратным задачам, выразительнее было бы сказать, что простанство можно кодировать адекватной алгеброй. Если наблюдатель сумеет извлечь *модель* (представление) этой алгебры из оператора реакции, то, раскодировав модель, он восстановит пространство. Механизм "кодирования-декодирования" состоит в следующем.

По Гельфанду, у любой равномерной коммутативнной банаховой алгебры имеется каноническая модель, в которой элементы алгебры реализуются как функции на ее *спектре* — компакте, состоящем из ее характеров. О переходе к этой модели говорят как о геометризации исходной алгебры.

Пусть (Ω, g) есть подлежащее восстановлению многообразие, а алгебра $\mathfrak{A}$ такова, что ее спектр $\widehat{\mathfrak{A}}$ идентичен (гомеоморфен) Ω: именно в этом смысле она кодирует Ω. Пусть оператор R определяет некоторую модель $\mathfrak{A}^{\mathrm{mod}}$, изометрически изоморфную $\mathfrak{A}$. Тогда наблюдатель может построить эту модель и провести ее геометризацию. Определив спектр модели $\widehat{\mathfrak{A}^{\rm mod}} =: \tilde{\Omega}$, наблюдатель получит *гомеоморфную* копию оригинала Ω. Помимо этого, геометризация позволяет выделить семейство функций на $\tilde{\Omega}$, которое задает риманову структуру $\tilde{g}$, превращающую $\tilde{\Omega}$ в *изометрическую* копию $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$ оригинала (Ω, g). Риманово многообразие $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$ доставляет решение обратной задачи.

По этой схеме решаются все три задачи томографии. В АТ и ЭМТ, которые можно объединить общим названием "волновая томография", путь от оператора реакции к модельной алгебре длиннее и сложнее, чем в ИТ. В ИТ модель есть алгебра функциональная, а в волновых задачах $\mathfrak{A}^{\rm mod}$ суть алгебры операторные, а их построение использует специфические физические свойства соответствующих динамических систем. Ключевую роль играет *локальная полнота волн.*

Литература

[**1**] M. I. Belishev, *The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method* // SIAM J. Math. Anal. — 2003. — V. 35, № 1. — P. 172–182. [**2**] M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method* // Inverse Problems. — 2007. — V. 23, № 5. — P. R1–R67. [**3**] M. I. Belishev and M. N. Demchenko, *Elements of noncommutative geometry in inverse problems on manifolds* // Journal of Geometry and Physics. — 2014. — V. 78, April 2014. — P. 29–47.

Теоремы вложения для пространств мультипликаторов

А. А. Беляев (Мех-мат МГУ)

Рассмотрим для $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$, пространство бесселевых потенциалов $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ и пространство

$$H^s_{p,unif,\eta}(\mathbb{R}^n) \stackrel{def}{=} \{u \in H^s_{p,loc}(\mathbb{R}^n) \mid$$
$$\|u\|_{H^s_{p,unif,\eta}(\mathbb{R}^n)} \stackrel{def}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|\eta_z u\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty\},$$

где $\eta_z(x) = \eta(x-z)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, а $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$ — неотрицательная функция, равная 1 на единичном шаре в $\mathbb{R}^n$. Поскольку для различных η соответствующие нормы эквивалентны, то будем пространство $H^s_{p,unif,\eta}(\mathbb{R}^n)$ обозначать просто как $H^s_{p,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим при $k, l \geqslant 0$, $p, q > 1$ пространство $M(H^k_p(\mathbb{R}^n), H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ мультипликаторов из пространства $H^k_p(\mathbb{R}^n)$ в пространство $H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех распределений $\mu \in D'(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\exists C > 0 : \|f\mu\|_{H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \quad \|f\|_{H^k_p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in D(\mathbb{R}^n) \qquad (1)$$

с нормой, определяемой как инфимум констант $C > 0$, таких, что выполняется неравенство (1).

В работе исследуется задача описания пространства $M(H_p^k(\mathbb{R}^n), H_{q'}^{-l}(\mathbb{R}^n))$ в шкале пространств $H_{p,unif}^s(\mathbb{R}^n)$. Основным результатом является следующая

Теорема. *Пусть* $p, q > 1$, $p \leqslant q'$ *и либо* $k \geqslant l \geqslant 0$, $k > \frac{n}{p}$, *либо* $l \geqslant k \geqslant 0$, $l > \frac{n}{q}$. *Тогда*

$$M(H_p^k(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-l}(\mathbb{R}^n)) = H_{q',unif}^{-l}(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',unif}^{-k}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Заметим, что в случаях $p = q$ или $k = l$ условия теоремы можно ослабить.

Ключевым для доказательства основной теоремы является тот факт, что в случае $p \leqslant q'$ на пространстве мультипликаторов можно ввести эквивалентную стандартной норме норму

$$|||\mu|||_{M(H_p^k(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-l}(\mathbb{R}^n))} \overset{def}{=} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{\|\eta_z \mu\|_{M(H_p^k(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-l}(\mathbb{R}^n))}\}.$$

Ранее задача описания пространств мультипликаторов в шкале пространств $H_{p,unif}^s$ исследовалась в частных случаях $M(H_2^k(\mathbb{R}^n), H_2^{-l}(\mathbb{R}^n))$ (см. [**1**]), $M(H_p^k(\mathbb{R}^n), H_{p'}^{-k}(\mathbb{R}^n))$ (см. [**2**]), а также в случае $M(W_p^k(\mathbb{R}^n), W_p^{-l}(\mathbb{R}^n))$ для натуральных k и l (см. [**3**]).

Литература

[**1**] Neiman-Zade M. I., Shkalikov A. A., *Strongly elliptic operators with singular coefficients* // Russian Journal Of Mathematical Physics. — 2006. — V. 13, № 1. — P. 70–78. [**2**] Дж.-Г. Бак, А. А. Шкаликов, *Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шредингера с потенциалами-распределениями* // Математические заметки. — 2002. — Т. 71, № 5. — С. 643–651. [**3**] Mazya V., Shaposhnikova T., *Characterization of multipliers in pairs of Besov spaces* // Operator Theoretical Methods and Applications to Mathematical Physics: The Erhard Meister Memorial Volume, 2004, Birkhauser, P. 365–387.

О вольтерровых относительно-компактных возмущениях оператора Лапласа

Б. Н. Бияров (Евразийский Национальный Университет, Казахстан)

В гильбертовом пространстве H рассмотрим линейный оператор L с областью определения $D(L)$, с областью значения $R(L)$. Ядром оператора L назовем множество

$$\text{Ker } L = \{f \in D(L) : \ Lf = 0\}.$$

Определение 1. Линейный замкнутый оператор L_0 в гильбертовом пространстве H называется *минимальным*, если $\overline{R(L_0)} \neq H$ и существует ограниченный обратный оператор L_0^{-1} на $R(L_0)$.

Определение 2. Линейный замкнутый оператор $\widehat{L}$ в гильбертовом пространстве H называется *максимальным*, если $R(\widehat{L}) = H$ и $\operatorname{Ker}\widehat{L} \neq \{0\}$.

Определение 3. Линейный замкнутый оператор L в гильбертовом пространстве H называется *корректным*, если существует ограниченный обратный оператор L^{-1}, определенный на всем H.

Определение 4. Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем *корректным расширением* минимального оператора L_0 (*корректным сужением* максимального оператора $\widehat{L}$), если $L_0 \subset L$ ($L \subset \widehat{L}$).

Определение 5. Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем *граничным корректным* расширением минимального оператора L_0 относительно максимального оператора $\widehat{L}$, если L является одновременно корректным сужением максимального оператора $\widehat{L}$ и корректным расширением минимального оператора L_0, т. е. $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$.

Пусть $\widehat{L}$ — максимальный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, L — какое-либо известное корректное сужение оператора $\widehat{L}$ и K — произвольный линейный ограниченный оператор в H, удовлетворяющий следующему условию:

$$R(K) \subset \operatorname{Ker}\widehat{L}. \tag{1}$$

Тогда оператор L_K^{-1}, определяемый (см. [**1**], [**2**]) формулой

$$L_K^{-1} f = L^{-1} f + K f, \tag{2}$$

описывает обратные к всевозможным корректным сужениям L_K максимального оператора $\widehat{L}$, т. е. $L_K \subset \widehat{L}$.

Пусть L_0 — минимальный оператор в гильбертовом пространстве H, L — какое-либо известное корректное расширение минимального оператора L_0, K — линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий условиям

a) $R(L_0) \subset \operatorname{Ker} K$,

b) $\operatorname{Ker}(L^{-1} + K) = \{0\}$,

тогда оператор L_K^{-1}, определённый формулой (2), описывает обратные к всевозможным корректным расширениям L_K минимального оператора L_0.

Пусть L — какое-либо известное граничное корректное расширение минимального оператора L_0, т. е. $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$. Существование хотя бы одного граничного корректного расширения L было доказано М. И. Вишиком [**3**]. Пусть K — линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий условиям

a) $R(L_0) \subset \operatorname{Ker} K$,

b) $R(K) \subset \operatorname{Ker} \widehat{L}$,

тогда оператор L_K^{-1}, определяемый формулой (2) описывает обратные к всевозможным граничным корректным расширениям L_K минимального оператора L_0.

Определение 6. Оператор A в гильбертовом пространстве H называется *вольтерровым оператором*, если A компактен и квазинильпотентен.

В недавней работе автора (см. [**4**]) выделен широкий класс корректных сужений и расширений для оператора Лапласа, которые не могут быть вольтерровыми. Замечено, что в одномерном случае (см. [**5**]) вольтерровость задачи зависит от поведения младших членов. Это было доказано для уравнения Штурма-Лиувилля. Тогда возникает вопрос: «Поможет ли привлечение младших членов для оператора Лапласа в отыскании вольтерровых задач как в одномерном случае?»

Данная работа посвящена изучению этого вопроса.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим минимальный L_0 и максимальный $\widehat{L}$ операторы, порожденные оператором Лапласа

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right). \tag{3}$$

Замыкание L_0 в пространстве $L_2(\Omega)$ оператора Лапласа (3) с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$ называется *минимальным оператором, отвечающим оператору Лапласа.*

Оператор $\widehat{L}$, сопряженный к минимальному оператору L_0, соответствующему оператору Лапласа, называется *максимальным оператором, отвечающим оператору Лапласа* (см. [**6**]). Заметим, что

$$D(\widehat{L}) = \{u \in L_2(\Omega): \ \widehat{L}u = -\Delta u \in L_2(\Omega)\}.$$

Обозначим через L_D оператор, соответствующий задаче Дирихле, с областью определения

$$D(L_D) = \{u \in W_2^2(\Omega): \ u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Тогда в силу (2) обратные операторы L^{-1} к всевозможным корректным сужениям максимального оператора $\widehat{L}$, соответствующего оператору Лапласа (3), имеют следующий вид

$$u \equiv L^{-1} f = L_D^{-1} f + K f,$$

где K – в силу (1) произвольный ограниченный в $L_2(\Omega)$ оператор с

$$R(K) \subset \operatorname{Ker} \widehat{L} = \{u \in L_2(\Omega) : \ -\Delta u = 0\}.$$

Тогда прямой оператор L определяется из следующей задачи

$$\widehat{L} u \equiv -\Delta u = f, \quad f \in L_2(\Omega), \tag{4}$$
$$D(L) = \{u \in D(\widehat{L}) : \ (I - K\widehat{L}) u|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{5}$$

где I — единичный оператор в $L_2(\Omega)$.

Теперь сформулируем основной результат:

Теорема 1. В задаче (4) и (5) берём оператор K компактным, положительным в $L_2(\Omega)$ и его занумерованные в порядке убывания с учетом кратностей собственные значения $\{\mu_j\}_1^\infty$ удовлетворяющим условию

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{2n} \mu_n^{-1} = 1.$$

Тогда существует компактный в $L_2(\Omega)$ оператор S и относительно компактное возмущение оператора Лапласа

$$\begin{cases} \widehat{L}_S u = -\Delta u + S(-\Delta u) = f, \quad f \in L_2(\Omega), \\ D(L_S) = \{u \in D(\widehat{L}) : \ (I - K\widehat{L}) u|_{\partial\Omega} = 0\}, \end{cases}$$

является вольтерровой граничной корректной задачей.

В качестве примера получен оператор K, который удовлетворяет условию теоремы 1 и собственные значения μ_n обладают асимтотикой

$$\mu_n \approx 1/\ln(n+2), \quad \text{при } n \to \infty.$$

В данном случае оператор K компактный но не принадлежит ни одному классу Шаттена.

Литература

[**1**] М. Отелбаев, А. Н. Шыныбеков, *Корректные задачи типа Бицадзе–Самарского* // ДАН СССР. — 1982. — Т. 265, № 4. — С. 815–818. [**2**] Б. К. Кокебаев, М. Отелбаев, А. Н. Шыныбеков, *К вопросам расширения и сужения операторов* //

ДАН СССР — 1983. — Т. 271, № 6. — С. 1307–1310. [**3**] М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений* // Тр. ММО. — 1952. — Т. 1. — С. 187–246. [**4**] Б. Н. Бияров, *О спектре корректных сужений и расширений для оператора Лапласа* // Мат. заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 507–516. [**5**] Б. Н. Бияров, С. А. Джумабаев, *Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля* // Мат. заметки. — 1994. — Т. 56, № 1. — С. 143–146. [**6**] Л. Хёрмандер, *К теории общих дифференциальных операторов в частных производных*, М., ИЛ, 1959.

Обратная спектральная задача для несамосопряженного матричного оператора Штурма–Лиувилля

Н. П. Бондаренко (Саратовский государственный университет)

Рассмотрим краевую задачу для матричного уравнения Штурма–Лиувилля на конечном интервале:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \quad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, λ — спектральный параметр, $Q(x)$ — $m \times m$-матрица с элементами из $L_2(0, \pi)$, h и H — комплексные $m \times m$ матрицы.

Задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nq}\}$, которые удобно нумеровать согласно асимптотике

$$\sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + o(n^{-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad q = \overline{1, m}.$$

Пусть $\Phi(x, \lambda) = [\Phi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=1}^m$ — матричное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$, где I_m — единичная матрица, 0_m — нулевая матрица. Матричная функция $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$, называемая *матрицей Вейля*, имеет полюса λ_{nq}. Обозначим $\alpha_{nq} := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} M(\lambda)$.

Исследуется *обратная задача*: по заданным спектральным данным $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ построить Q, h и H.

В самосопряженном случае ($Q = Q^*$, $h = h^*$, $H = H^*$) характеризация спектральных данных обратной задачи была дана в [**1**]. В данной работе мы исследуем несамосопряженный случай, налагая некоторые ограничения, в частности, требуя простоты полюсов матрицы Вейля.

Получен конструктивный алгоритм решения обратной задачи, основанный на методе спектральных отображений [**2**], а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00134 и 14-01-31042).

Литература

[**1**] Bondarenko N., *Spectral analysis for the matrix Sturm-Liouville operator on a finite interval* // Tamkang J. Math. — 2011. — V. 42, № 3. — P. 305–327. [**2**] Юрко В. А., *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

О дефектных числах операторов типа Лежандра 4-го порядка на оси

И. Н. Бройтигам (Северный (Арктический) федеральный университет)

Рассмотрим дифференциальное выражение 4-го порядка

$$l_4[y](x) := (p_2(x)y'')'' - (p_1(x)y')' + ky(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $k \geqslant 0$ и вещественнозначные функции $p_2(x)$ и $p_1(x)$ определяются как

$$p_2(x) := (1-x^2)^2, \quad p_1(x) := a_3(1-x^2) + a_2(1-x) + a_1(1+x) + a_0,$$
$$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad a_3 > 0.$$

Отметим, что если $x \in (-1,1)$ и, например,

$$p_1(x) = 2(2A+1)(1-x^2) + 4(1-x), A > 0 \tag{2}$$

или

$$p_1(x) = 2(2B+1)(1-x^2) + 4(1+x), B > 0, \tag{3}$$

то выражение (1) порождает операторы, собственными функциями которых являются левосторонние (случай (2)) или правосторонние (случай (3)) ортогональные полиномы типа Лежандра. Спектральные характеристики таких операторов хорошо известны.

Рассмотрим дифференциальное выражение (1) на вещественной оси. На этом множестве оно имеет 4 регулярные особые точки: ± 1 и $\pm\infty$.

Разобьём числовую прямую на подмножества $I_1 := (-\infty, -2]$, $I_2 := (-2, 0)$, $I_3 := (0, 2)$, $I_4 := [2, +\infty)$, содержащие по одной особой точке, и отдельно рассмотрим множество $I_5 := (-\infty, +\infty)$.

На множествах I_j, $j = 1, 4$, выражение (1) — выражение с единственной особенностью на конце и, следовательно, оно известным образом определяет минимальные замкнутые симметрические операторы $L_{0,j}$ в гильбертовых пространствах $\mathcal{L}_2(I_j)$, $j = 1, 4$. На I_j, $j = 2, 3, 5$, дифференциальное выражение (1) имеет внутренние особенности, поэтому определим минимальные замкнутые симметрические операторы $L_{0,j}$ как замыкания операторов, порождённых (1) на множествах бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(I_j)$.

Рассмотрим множества I_j, $j = 1, 4$. В этих случаях дифференциальное выражение (1) удовлетворяет всем условиям теоремы Орлова [**1**] и, применяя эту теорему, получаем, что дефектные числа каждого из операторов $L_{0,1}$ и $L_{0,4}$, порождённых выражением (1) в пространствах $\mathcal{L}_2(I_1)$ и $\mathcal{L}_2(I_4)$ соответственно, равны $(2, 2)$.

Случаи операторов $L_{0,2}$, $L_{0,3}$ и $L_{0,5}$ уже существенно сложнее, поскольку особые точки являются внутренними. Однако, применяя методы, использованные в работах [**2**] и [**3**], можно показать, что, например, в случае (3) дефектные числа операторов $L_{0,2}$ и $L_{0,3}$ равны $(5, 5)$ и $(3, 3)$ соответственно.

Из полученных результатов непосредственно следует, что оператор $L_{0,5}$ самосопряжён.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ и Германской службы академических обменов (DAAD) по программе «Михаил Ломоносов» (ref: 325-A/13/74976).

Литература

[**1**] Орлов С. А., *Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов* // ДАН СССР. — 1953. — Т. 92, № 3. — С. 483–486. [**2**] Орочко Ю. Б., *Индексы дефекта одночленного симметрического дифференциального оператора четного порядка, вырождающегося внутри интервала* // Математический сборник. — 2005. — Т. 196, № 5. — С. 53–82. [**3**] Бройтигам И. Н., *Спектральный анализ одночленного симметрического дифференциального оператора чётного порядка* // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Естественные науки. — 2009. — № 3. — С. 76–84.

Псевдомера и формулы Фейнмана, соответствующие уравнению $dw/dt = (1)^N + 1\Delta^N(w) + V(w)$

М. С. Бузинов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Рассматривается эволюционное уравнение с оператором Лапласа в степени $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$, и потенциалом. Такие уравнения находят применение в разных областях физики, химии, биологии и компьютерных наук. Получены формулы Фейнмана для эволюционного уравнения, приведенного в заглавии, при заданных начальных условиях. Иначе говоря, решение представляется в виде предела кратных интегралов при стремлении кратности к бесконечности.

Термин «формула Фейнмана» был предложен в работе [**1**]; также в работах Смолянова и его соавторов [**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **8**, **9**] был предложен метод получения формул Фейнмана для широкого класса эволюционных уравнений. Идея метода состоит в аксиоматизации подхода, предложенного в работе [**6**] Р. Фейнмана. Подход Смолянова опирается на теорему Чернова [**7**], обобщающую формулу Троттера.

Семейство операторов $F(t)$ в некотором банаховом протранстве, для которого выполнены условия теоремы Чернова по отношению к полугруппе $(T_t)_{t\geqslant 0}$, разрешающей эволюционное уравнение, удовлетворяет равенству:

$$T_t = \lim_{n\to\infty}(F(t/n))^n,$$

где предел понимается в смысле сильной операторной топологии.

Определение. Равенство (0) называется *формулой Фейнмана*, гамильтоновой, если для всех $t \geqslant 0$ оператор $F(t)$ — псевдодифференциальный, и лагранжевой, если интегральный.

Рассматривается следующая задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial\omega}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = (-1)^{N+1}\triangle^N\omega(t,\mathbf{x}) + V(x)\omega(t,\mathbf{x}) \\ \omega(o,\mathbf{x}) = \omega_0(\mathbf{x}) \end{cases}$$

где ω — функция на $[0;\infty)\times\mathbb{R}^n$, V — ограниченная и непрерывная на $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Имеют место следующие формулы Фейнмана для поставленной задачи Коши,* $\forall\omega_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Гамильтоновы формулы Фейнмана:

$$\omega(t,\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\dots\int\limits_{\mathbb{R}^n}}_{2n}\exp\Big[(t/n)\sum_{k=1}^{n}(-\mathbf{u}_k^{2N}+V(\mathbf{v}_k))\Big]\times$$
$$\times\, e^{i\mathbf{u}_k(\mathbf{v}_k-\mathbf{v}_{k-1})}\omega_0(\mathbf{v}_n)d\mathbf{u}_1 d\mathbf{v}_1\dots d\mathbf{u}_n d\mathbf{v}_n,$$

$$\omega(t,\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\dots\int\limits_{\mathbb{R}^n}}_{2n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{t}{n}\mathbf{u}_k^{2N}}\exp\Big[\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}V(\mathbf{v}_k)\Big]\times$$
$$\times\, e^{i\mathbf{u}_k(\mathbf{v}_k-\mathbf{v}_{k-1})}\omega_0(\mathbf{v}_n)d\mathbf{u}_1 d\mathbf{v}_1\dots d\mathbf{u}_n d\mathbf{v}_n,$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0$.

Лагранжева формула Фейнмана для $n = 1$*:*

$$\omega(t,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}}}_{n} e^{\sum\limits_{k=1}^{n} -|v_k| + \frac{t}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} V(v_k)} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \Big(\cos|v_k| + \sin|v_k| \Big) \omega_0 \Big(v_{n+1} - \sqrt{2}(\frac{t}{n})^{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^{n} v_k \Big) dv_1 \dots dv_n,$$

где $x = v_{n+1}$.

Лагранжева формула Фейнмана для $n = 3$*:*

$$\omega(t,\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi^{2n}} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^3} \dots \int\limits_{\mathbb{R}^3}}_{n} \exp\left(- \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{u}_k\| + V(\mathbf{u}_k) \right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\ \|\mathbf{u}_k\|}{\|\mathbf{u}_k\|} \omega_0 \left(\mathbf{u}_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k \right) d\mathbf{u}_1 \dots d\mathbf{u}_n,$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{u}_{n+1}$.

Известно, что уравнение теплопроводности порождает меру Винера и винеровский случайный процесс. Можно считать, что рассматриваемое уравнение порождает псевдомеру, и случайный псевдопроцесс. Так, подинтегральные выражения в формулах Фейнмана подобны переходным плотностям вероятности некоторых случайных процессов.

Ранее, в работах **[10, 11]** были рассмотрены переходные плотности, соответствующие гамильтоновым формулам Фейнмана.

В данной работе переходные плотности соответсвуют лагранжевым формулам Фейнмана:

$$p(t_1,t_2,x_1,x_2) = e^{-\frac{|x_2-x_1|}{(t_2-t_1)^{1/4}}} \left(\cos\frac{|x_2-x_1|}{(t_2-t_1)^{1/4}} + \sin\frac{|x_2-x_1|}{(t_2-t_1)^{1/4}} \right)$$

и на пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$e^{-(t_2-t_1)\|x_2-x_1\|} \frac{\sin{(t_2-t_1)}\|x_2-x_1\|}{(t_2-t_1)\|x_2-x_1\|}$$

Важным отличием порождаемых этими плотностями цилиндрических мер является их знакопеременность и неограниченная полная вариация. Вместе с этим полезно придать смысл термину «подпространство полной меры».

Литература

[**1**] Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A., *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula* // J. Math. Phys. — 2002. — V. 43, № 10. — P. 5161–5171. [**2**] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V., Wittich O., *Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures* // Doklady Math. — 2000. — V. 61. — P. 230–234. [**3**] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V., Wittich O., *Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions* // In: Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS. — 2000. — V. 29. — P. 589–602. [**4**] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V., Wittich O., *Chernoff's theorem and the construction of semigroups. Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics* // Proc. 7th Intnl. Conf. Evolution Eqs and Appl., Levico Terme, Italy, Oct./Nov. 2000. Birkhäauser, Prog. Nonlinear Dier. Eq. Appl. — 2003. — V. 55. — P. 349–358. [**5**] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V., Wittich O., *Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift* // Doklady Math. — 2007. — V. 76, № 1. — P. 606–610. [**6**] Feynman R. P., *Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics* // Rev.Mod. Phys. — 1948. — V. 20. — P. 367–387. [**7**] Chernoff P., *Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators* // Mem. Am. Math. Soc. — 1974. — V. 140. [**8**] Бутко Я. А., *Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия* // Мат. Заметки. — 2008. — Т. 83, № 3. — С. 333–349. [**9**] Бутко Я. А., Смолянов О. Г., Шиллинг Р. Л., *Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп* // Доклады РАН. — 2010. — Т. 434, № 1. — С. 7–11. [**10**] Hochberg K. J., *A Signed measure on path space related to Wiener measure* // The Annals of Probability. — 1978. — V. 6, № 3. — P. 433–458. [**11**] Krylov V. Yu., *Some properties of the distribution corresponding the equation* $\frac{\partial u}{\partial t} =) - 1)^{q+1} \frac{\partial^{2q} u}{\partial x}^{2q}$ // Soviet Math. Dokl. I. — P. 760–763.

Фейнмановские аппроксимации динамики функции Вигнера

М. О. Буркацкий (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Получены формулы Фейнмана для разрешающей полугруппы, описывающей эволюцию функции Вигнера (определенной на фазовом пространстве конечномерной гамильтоновой системы). Кроме того предложен новый вывод уравнения Мойала ([**3**]). При этом предполагается, что функция Гамильтона H определяется равенством: $H(q,p)=\frac{p^2}{2}+V(q)$, где V многочлен.

1. Вывод уравнения Мойала для эволюции функции Вигнера. Пусть $E=Q\times P$, где Q и P две копии конечномерного евклидова пространства, T оператор плотности, описывающий состояние квантового аналога гамильтоновой системы с функцией Гамильтона H, т. е. ядерный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$. Тогда (см.например [**1**]) функция Вигнера $W_T(q,p)$, соответствующая состоянию T, определяется равенством, где $\rho_T(\cdot,\cdot)$ ядро оператора T:

$$W_T(q,p)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_Q \rho_T\left(q-\frac{r}{2},q+\frac{r}{2}\right)e^{-irp}dr$$

Символом $T(t)$ будем обозначать оператор плотности в момент времени t. Положим еще $W(q,p,t)=W_{T(t)}(q,p)$, $\rho(q,p,t)=\rho_{T(t)}(q,p)$.

Теорема. *Пусть* $\forall t\geq 0$ *выполненны следующие условия:*

1). $\rho(\cdot,\cdot,t)\in S(Q\times Q)$.

2). Для почти всех (q,q_1) *существует* $\frac{\partial\rho(q,q_1,t)}{\partial t}$.

3). Существует функция $\varphi\in L_2(Q\times Q)$ *для которой выполненно* $\left|\frac{\partial\rho(q,q_1,t)}{\partial t}\right|\leq\varphi(q,q_1)$.

Тогда эволюция функции Вигнера $W(q,p,t)$ *описывается уравнением*

$$\frac{\partial W(q,p,t)}{\partial t}=(-p,\nabla_q W(q,p,t))+2\sin\frac{1}{2}(\nabla_p,\nabla_q^V)\,(W(q,p,t)V(q)) \qquad (1)$$

где ∇_q^V *— оператор дифференцирования по переменной* q *у функции* $V(q)$.

2. Формулы Фейнмана для разрешающих полугрупп уравнения Мойала. Для всякой функции $F:E\times E\to\mathbb{C}$ определим псевдодифференциальный оператор (ПДО) $\widehat{F}:\mathrm{dom}(\widehat{F})\subset L_2(E)\to L_2(E)$, символом которого является F, действующий на φ по правилу

$$(\widehat{F}\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_E\int\limits_E F(x,\eta)e^{i\eta(x-\xi)}\varphi(\xi)d\xi d\eta$$

(такой оператор называют так же ПДО с 0 символом F, см. [**2**]).

После преобразовния Фурье по переменной p обеих частей уравнения (1) оно примет вид уравнения Шрёдингера, гамильтониан которого является ПДО с символом $\mathcal{H}((q_1, p_1), (q_2, p_2)) = p_2 q_1 + V\left(q_2 + \frac{p_1}{2}\right) - V\left(p_2 - \frac{p_1}{2}\right)$. Положим $\varphi(t, q, p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_P e^{-ip\bar{p}} W(q, \bar{p}, t) d\bar{p}$.

Теорема. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to L_2(E)$ решение следующей задачи Коши с начальным условием $\varphi_0 \in L_2(E)$*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\widehat{\mathcal{H}}\varphi \\ \varphi(q, p, 0) = \varphi_0(q, p) \end{cases}$$

Тогда справедливо следующее равенство ("формула Фейнмана"):

$$\varphi(q, p, t) = (e^{-it\widehat{\mathcal{H}}}\varphi_0)(q, p) = \lim_{n\to\infty}((\widehat{e^{-i\frac{t}{n}\mathcal{H}}})^n\varphi_0)(q, p), \tag{2}$$

где предел берется в $L_2(E)$.

Формула Фейнмана для разрешающей полугруппы уравнения Мойала получается обратным преобразовнием Фурье по переменной p равенства (2).

Литература

[**1**] Козлов В. В., Смолянов О. Г., *Функция Вигнера и диффузия в бесстолкновительной среде, состоящей из квантовых частиц* // Теория вероятностей и приложения. — 2006. — Т. 51, №. 1. — С. 1–13. [**2**] Смолянов О. Г., Трумен А., *Стохастические уравнения Шредингера для гамильтоновых систем со связями* // Докл. РАН. — 1999. — Т. 369, № 5. — С. 600–604. [**3**] Moyal J. E., *Quantum mechanics as a statistical theory*, 1947.

Об одной постановке обратной спектральной задачи

Н. Ф. Валеев (Институт математики с ВЦ РАН, БашГУ, Уфа, Россия)

1. В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается m-параметрический линейный пучок компактных и самосопряженных операторов вида

$$B(\vec{p}) = B_0 + p_1 B_1 + ... + p_m B_m, \quad \vec{p} \in R^m. \tag{1}$$

Пусть $\lambda_1^+(\vec{p}) \geq \lambda_2^+(\vec{p}) \geq ... \geq \lambda_j^+(\vec{p}) \geq ... \geq 0$ — положительные собственные значения, занумерованные с учетом кратностей в порядке убывания, а $\lambda_1^-(\vec{p}) \leq \lambda_2^-(\vec{p}) \leq ... \leq \lambda_k^-(\vec{p}) \leq ... \leq 0$ — отрицательные собственные значения оператора $B(\vec{p})$, занумерованные с учетом кратностей в порядке возрастания.

Для оператора $B(\vec{p})$ изучается следующая постановка обратной спектральной задачи (многопараметрическая обратная спектральная задача — МПОСЗ):

Пусть даны m вещественных чисел

$$\mu_1^- < \mu_2^- < ... < \mu_{k_1}^- < 0 < \mu_{k_2}^+ < ... < \mu_3^+ < \mu_2^+ < \mu_1^+,$$

и m натуральных чисел $1 \leq l_1^- < l_2^- < ... < l_{k_1}^-$, $1 \leq l_1^+ < l_2^+ < ... < l_{k_2}^+$, $k_1 + k_2 = m$. Требуется найти $\vec{p} \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\lambda_{l_i}^-(\vec{p}) = \mu_{l_i^-}^-, \quad i = 1, 2, ..., k_1,$$

$$\lambda_{s_j}^+(\vec{p}) = \mu_{l_j^+}^+, \quad j = 1, 2, ..., k_2.$$

Упорядоченные наборы чисел $\vec{\mu} = \{\mu_1^-, \mu_2^-, ..., \mu_{k_1}^-, \mu_{k_2}^+, ..., \mu_3^+, \mu_2^+, \mu_1^+\}$ и $l = \{l_1^-, l_2^-, ..., l_{k_1}^-, l_1^+, l_2^+, ..., l_{k_2}^+\}$ будем называть упорядоченными спектральными данными. Таким образом, в данной постановке МПОСЗ спектральными данные состоят не только m-чисел, но и их порядковых номеров.

Сформулированная постановка задачи возникает в математических моделях диагностики или идентификации технических систем по ее собственным колебаниям, аналогичные постановки обратных спектральных задач полезны также при исследовании моделей управления резонансными характеристиками объекта, когда посредством подбора доступных параметров объекта (линейной динамической системы) требуется придать ей те или иные частотно-резонансные характеристики. Этим задачам посвящено большое количество работ, см., например, работы [**1**, **2**] и библиографию к ним.

В работе получены условия существования решений МПОСЗ, единственности и вещественной изолированности. Основные утверждения работы также существенно дополняют некоторые положения многопараметрической спектральной теории ([**3**]).

2. В качестве приложения основных результатов к обратным спектральным задачам механики исследованы некоторые модели синтеза упругих пластин и оболочек с заданными спектральными характеристиками.

Рассматривается уравнение собственных колебаний пластин Ω в упругой среде

$$a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2b\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\sum_{j=1}^{n1} k_j q_j(x,y)\right) u = \lambda \left(\sum_{j=1}^{n2} m_j h_j(x,y)\right) u, \tag{2}$$

с однородными граничными условиями $l(w)|_{\partial\Omega} = 0$. Величина $\left(\sum_{j=1}^{n1} m_j h(x,y)\right)$ соответствует распределению массы пластины, а $\left(\sum_{j=1}^{n2} k_j q_j(x,y)\right)$ распределению упругости внешней среды.

Пусть требуется подобрать такие значения m_j масс и коэффициентов жесткости среды k_j, чтобы первые n собственных значений операторного пучка (2) были равны наперед заданным числам $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < \lambda_{n+1} < ... < \lambda_{n1+n2}$.

Из общих утверждений для МПОСЗ вытекает утверждение:

Теорема. *Пусть* $\mathrm{mes}\{(x,y) \in \Omega \| \sum_{k=1}^{n1} p_k q_k(x,y) = 0\} = 0$ *и* $\mathrm{mes}\{(x,y) \in \Omega \| \sum_{k=1}^{n2} p_k h_k(x,y) = 0\} = 0$ *при всех* $||\vec{p}|| = 1$. *Тогда у МПОСЗ для оператора* (2) *существует решение.*

Литература

[**1**] T. Moody, G. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, Oxford University Press, 2005. [**2**] Patrick J. Browne, B. D. Sleeman, *Inverse multiparameter eigenvalue problems for matrices* // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. — 1988. — V. 31. — P. 151–155. [**3**] Volkmer H., *Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorems*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. Lect. Notes Math. № 356, 1988.

О задаче Штурма–Лиувилля с согласованно самоподобными коэффициентами

А. А. Владимиров (ВЦ им. А. А. Дородницына РАН)

В последнее время проводится изучение задач Штурма–Лиувилля вида

$$-(y'/r)' = \lambda p y, \qquad y(0) = y(1) = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты r и p суть не имеющие общих атомов борелевские меры (см., например, [**1**, **2**]). На основе аппроксимативного подхода [**3**, **4**] понимание задачи (1) может быть распространено на случай, когда вес p есть обобщённая функция некоторого связанного с мерой r класса $\mathfrak{M}_r$. При этом рассматриваемая задача оказывается с точностью до замены переменной совпадающей с “классической” задачей вида

$$-u'' = \lambda \hat{p} u, \quad u(0) = u(1), \tag{2}$$

где $\hat{p} \in W_2^{-1}[0,1]$. Более того, для самоподобных (с согласованным в некотором смысле характером самоподобия) обобщённых функций r и

p задача (1) сводится к задаче (2) с самоподобной $\hat{p}$. Это наблюдение позволяет перенести на случай задачи (1) с согласованно самоподобными коэффициентами известные результаты о спектральных свойствах задачи (2) с самоподобным весом.

В работе [**1**] заявлен также более сильный результат, относящийся к случаю, когда мера r лишь "почти" самоподобна. Однако, как будет показано в докладе, лежащая в основе соответствующего доказательства лемма опровергается на примере.

Работа поддержана РФФИ, грант № 13-01-00705.

Литература

[**1**] U. Freiberg, *Refinement of the spectral asymptotics of generalized Krein–Feller operators* // Forum Math. — 2011. — V. 23. — P. 427–445. [**2**] J. Eckhardt, G. Teschl, *Sturm–Liouville operators with measure-valued coefficients* // Journal d'analyse mathématique. — 2013. — V. 120, № 1. — P. 151–224. [**3**] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов, *Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов* // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 723–733. [**4**] А. А. Владимиров, *О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов* // Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, № 6. — С. 941–943. [**5**] А. А. Владимиров, *Об одном классе сингулярных задач Штурма–Лиувилля* // `arXiv:1211.2009`.

Об асимптотиках и оценках норм собственных функций задачи Штурма–Лиувилля с весом и сингулярным потенциалом

В. Е. Владыкина (Мех-мат МГУ)

В работе рассматривается спектральная задача Штурма–Лиувилля с положительным весом

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 \rho(x)y(x), \qquad y(0) = y(1) = 0, \tag{1}$$

$q \in W_2^{-1}[0;1]$, $\rho \in AC[0;1]$, $\exists M, m : 0 < m \leq \rho(x) < M$.

Теорема 1. *В области* $\{\operatorname{Re}\lambda > -\lambda_0\}$ *собственные функции задачи* (1) *имеют вид*

$$y_n = e^{\Phi(t)} \sin \pi n t + o(1), \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где

$$t = \frac{1}{h}\int_0^x \sqrt{\rho(\xi)}\, d\xi, \quad h = \int_0^1 \sqrt{\rho(\xi)}\, d\xi, \quad \Phi = \frac{1}{2}\int_0^t \phi(\xi)\, d\xi, \quad \phi = -\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)}.$$

Другим интересным вопросом представляется сравнение C-норм и L_p-норм собственных функций задачи (1).

Ранее в [**1**] поднимался вопрос о сравнении C-нормы и L_2-нормы и было показано, что если $\rho \in BV[0;1]$, то они эквивалентны, а если рассматривать все непрерывные ρ, то это уже не так.

Для получения оценок были использованы полученные асимптотики собственных функций при $\rho \in AC[0;1]$ и построена последовательность, позволяющая доказать их верность так же и для $\rho \in BV[0;1]$.

Теорема 2. *Пусть функция ρ ограниченной вариации, а $q \in W_2^{-1}(0,1)$. Тогда для собственных функций $y_n(x)$ задачи* (1) *верны оценки*

$$\|y_n\|_{C[0;1]} \leq C(\rho)\|y_n\|_{L_p[0;1]}, \quad \forall p \geq 1.$$

Таким образом, в случае, когда $\rho \in BV[0;1]$ C-нормы и L_p-нормы собственных функций эквивалентны.

Литература

[**1**] Якубов В. Я., *Ограниченность нормированных собственных функций задачи Штурма–Лиувилля при минимальных ограничениях на гладкость коэффициентов* // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 8. — С. 1465–1467.

Исследование интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах теплопроводности с памятью и вязкоупругости

В. В. Власов (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Н. А. Раутиан (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Р. Перез Ортиз (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Изучаются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве и с вольтерровыми интегральными операторами, зависящими от параметра. К исследованию таких уравнений приводят многочисленные задачи, возникающие в теории теплопроводности с памятью, теории вязкоупругости и т. д. Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. На этой основе устанавливаются представления решений этих уравнений в виде суммы слагаемых, отвечающих частям спектра указанных оператор-функций.

О краевой задаче, перфорированной вдоль части границы

Р. Р. Гадыльшин (БашГПУ)
Д. В. Кожевников (БашГПУ)

Рассматривается краевая задача для оператора Лапласа в двумерной области, перфорированной вдоль части границы в предположении, что диаметр отверстий может быть много меньше, чем расстояние между ними. На внешней границе выставлено однородное условие Неймана, а на границе малых полостей — однородное условие Дирихле. Установлены типы усредненных краевых задач в зависимости от отношения диаметра малых полостей к малому расстоянию между ними. Для спектральной задачи доказана сходимость собственных значений и собственных функций к собственным элементам усредненных (предельных) задач.

Геометрия неалгебраических решений полиномиальных векторных полей в $\mathbb{C}P^2$

Н. Б. Гончарук (НИУ ВШЭ)
Ю. Г. Кудряшов (НИУ ВШЭ)

Рассмотрим множество $\mathcal{A}_n$ всех полиномиальных векторных полей степени n в $\mathbb{C}^2$:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

Фазовый портрет такого векторного поля (с комплексным временем) — это голоморфное слоение с особенностями. Его листы представляют собой римановы поверхности; в типичном случае каждый лист плотен в $\mathbb{C}^2$.

В 2006 году Д. Волк доказал [**1**], что в плотном подмножестве в $\mathcal{A}_n$ все слоения имеют сепаратрисные связки (две разные особые точки имеют общую сепаратрису). То есть любое слоение из $\mathcal{A}_n$ можно пошевелить так, чтобы породить сепаратрисную связку.

С помощью близкой техники мы доказали следующее утверждение.

Теорема. *В плотном подмножестве в $\mathcal{A}_n$ каждое слоение имеет лист с по крайней мере $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 4$ ручками.*

Также мы получили следующий результат.

Теорема. *У типичного слоения с симметрией $P(x, y) = P(-x, y)$, $Q(x, y) = -Q(x, y)$ все листы имеют бесконечный род.*

Интересная открытая проблема: каков род у листов типичного слоения в $\mathcal{A}_n$? Для типичных *аналитических* слоений вопрос решён: в [**2**, **3**] доказано, что в этом случае все листы, кроме счетного числа, — диски, а все остальные — цилиндры.

Литература

[**1**] Д. С. Волк, *Плотность сепаратрисных связок в пространстве полиномиальных слоений в* $\mathbb{C}P^2$ // Тр. МИАН. — 2006. — Т. 254. — С. 181–191. [**2**] Т. И. Голенищева–Кутузова, *Бесконечность числа цилиндрических слоев для типичного аналитического слоения в* $\mathbb{C}^2$ // Тр. МИАН. — 2006. — Т. 254. — С. 192–195. [**3**] Т. С. Фирсова, *Топология аналитических слоений в* $\mathbb{C}^2$. *Свойство Купки–Смейла* // Тр. МИАН. — 2006. — Т. 254. — С. 162–180.

О вещественно-аналитических решениях нелинейного уравнения Шредингера

А. В. Домрин (Мех-мат МГУ)

Установлена разрешимость задачи Римана о факторизации для формальных матричнозначных рядов Лорана при условии унитарной симметрии. В качестве приложения показано, что любое локальное вещественно-аналитическое (по x и t) решение фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера продолжается вещественно-аналитически в некоторую полосу, параллельную оси x, и что на каждой такой полосе существует решение, не продолжаемое никуда дальше.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00495-а, 13-01-00622-а, 13-01-12417-офи-м) и гранта фонда Саймонса.

Формулы Фейнмана для уравнений типа теплопроводности в областях римановых многообразий и поверхностные меры

В. А. Дубравина (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Пусть G — компактное риманово многообразие, изометрически вложенное в $\mathbb{R}^n$, K — односвязная область в G, обладающая гладкой компактной границей ∂K. Рассматривается эволюционное уравнение теплопроводности $\frac{d}{dt}\varphi = \Delta\varphi$ относительно функций $\varphi : K \to \mathbb{R}$, $\varphi \in L_2(K)$, обладающих абсолютно непрерывной производной на K и удовлетворяющих следующим граничным условиям: для каждой точки $x \in \partial K$ выполнено $\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = 0$, где $\alpha, \beta : \partial K \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, Δ — оператор Лапласа–Бельтрами на G.

Пусть $\widetilde{W}_G^t$ — мера на пространстве $C([0,t],G)$, порождаемая рассматриваемым эволюционным уравнением, при этом переходная вероятность меры $\widetilde{W}_G^t$ совпадает с функцией Грина для этого эволюционного уравнения.

На пространстве $C([0,t],G)$ можно определить меру ν, равную пределу мер ν_ε при ε стремящемся к нулю, при этом меры ν_ε определены на пространстве $C([0,t],\mathbb{R}^n)$ и индуцированы эволюционным процессом описываемым уравнением теплопроводности в K_ε — ε-окрестности K в обемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$. Условия на границе K_ε выбираются в соответствии с граничными условиями на ∂K. Такая мера ν называется поверхностной мерой на $C([0,t],G)$.

При этом мера ν будет абсолютно-непрерывной относительно меры $\widetilde{W}_G^t$ с производной Радона–Никодима, являющейся элементарной функцией от геометрических характеристик многообразия G.

Также можно представить функцию Грина для рассматриваемого уравнения в виде пределов кратных интегралов по декартовым степеням G, при кратности, стремящейся к бесконечности, от элементарных фукнций геометрических характеристик многообразия, таким образом будут получены формулы Фейнмана для решения уравнения теплопроводности.

Также представляет интерес случай, когда в качестве эволюционного уравнения рассматривается уравнение типа теплопроводности, коэффициенты диффузии которого зависят от точки в области K.

Случай, когда эволюционное уравнение поставлено на всем многообразии G, был рассмотрен в статьях [**1**, **2**, **3**].

Литература

[**1**] O. G. Smolyanov, *Smooth measures on loop groups* // Doklady Mathematics. — 1995. — V. 52, № 3. — P. 455–458. [**2**] H. von Weizsäcker, O. G. Smolyanov, O. Wittich, *Diffusion on compact Riemannian manifolds* // Doklady Mathematics. — 2000. — V. 61, № 2. — P. 230–234. [**3**] O. G. Smolyanov, H. von Weizsäcker, O. Wittich, N. A. Sidorova, *Wiener surface measures on trajectories in Riemannian manifolds* // Doklady Mathematics. — 2001. — V. 65, № 4. — P. 458–463.

Формулы Фейнмана в голоморфном представлении

А. В. Дурягин (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Получена формула Фейнмана для эволюционного уравнения $\frac{\partial f}{\partial t}(t,\bar z) = \widehat{H} f(t,\bar z)$, где $\widehat{H}$ — гамильтониан квантовой системы, соответствующий виковскому квантованию классической системы.

Аксиоматика квантовой механики предусматривает сопоставление гамильтоновой системе (E, I, H) в терминах классической механики некоторой гамильтоновой системы $(\mathcal{E}, \mathcal{I}_{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{H}})$, где $\mathcal{E}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство — пространство состояний, $\widehat{\mathcal{H}}$ — самосопряженный оператор в $\mathcal{E}$ — гамильтониан системы и $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ — оператор задающий симплектическую структуру на $\mathcal{E}$ таким образом, чтобы уравнение Гамильтона для новой системы становилось уравнением Шредингера. При этом реализация гильбертова пространства не имеет значения. Такое соответствие принято называть квантованием. Эквивалентное представление квантования — соответствие алгебры Гейзенберга наблюдаемых классической системы некоторой алгебре самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ввиду того что эти соответствия неоднозначны, возникли различные способы их воплощения. Характерно, что все виды квантования, при которых гильбертово пространство реализовано как пространство функций конечномерного аргумента, унитарно эквивалентны, о чем нам говорит теорема Стоуна–фон Неймана. Эволюция состояний квантовой системы описывается однопараметрической группой унитарных операторов $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}}$, где $\widehat{H}$ здесь и далее — гамильтониан квантовой системы. В данной работе представлен метод получения оператора эволюции $U(t)$ при реализации гильбертова пространства в виде пространства голоморфных функций. В работе будет показано, что оператор эволюции может быть представлен как предел конечных степеней некоторого оператора, подынтегральное выражение которого представляет собой голоморфные функции. Такое представление оператора эволюции в данной работе будет называться голоморфной формулой Фейнмана.

Формулы Фейнмана. Формулами Фейнмана называются представления решений эволюционных уравнений пределами интегралов (обычно от элементарных функций) по декартовым степеням некоторого пространства G. Формула Фейнмана–Каца — это представление того же решения в виде интеграла по пространству функций вещественной переменной, принимающих значения в том же пространстве G. Кратные интегралы из формул Фейнмана аппроксимируют бесконечномерные интегралы из формул Фейнмана–Каца. Если функции из пространства, в котором действует оператор эволюции, определены на пространстве координат классической системы, то формула Фейнмана называется лагранжевой; если область определения — декартово произведение пространства координат и пространства импульсов, то формула Фейнмана называется гамильтоновой. В случае голоморфной формулы Фейнмана, как мы увидим, функции, в пространстве которых определен оператор эволюции, определены на комплексной плоскости.

О единственности решения обратной задачи спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков на отрезке

А. А. Елеуов (Казахский национальный университет имени аль-Фараби)
Н. Б. Закариянова (Казахский национальный университет имени аль-Фараби)
Р. А. Елеуова (Казахский национальный университет имени аль-Фараби)

В данной работе изложены некоторые результаты теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что более трудными являются обратные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков с нераспадающиемися граничными условиями. В работе исследуется единственность решения обратной задачи спектрального анализе для дифференциальных уравнений высших порядков с нелокальными граничными условиями. Частный случай указанных граничных условий представляют двухточечные нераспадающие граничные условия. Таким образом, результаты настоящей статьи охватывают как распадающиеся так и нераспадающие граничные условия. Именно, в этом смысле основной результат настоящей статьи обобщает результаты монографии [**1**], где приведены подобные теоремы единственности для распадающихся граничных условий.

Вначале приведем известные результаты по прямой задачи спектрального анализа дифференциальных операторов высших порядков на отрезке. В работе [**2**] изложена возможность разложения функции из некоторого функционального пространства по собственным и присоединенным функциями дифференциального оператора, положенного функциональном пространстве $L_2[0,b]$ при $b<\infty$ линейным дифференциальным выражением с переменными коэффициентами

$$Ly = l(y) = y^{(n)}(x) + P_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + ... + P_0(x)y(x), \qquad (1)$$

с единственным ограничением (1) резольвентное множество оператора L — ненулевое множество. Не умоляя общности, полагаем, что комплексное число 0 принадлежит резольвентному множеству оператора L. Коэффициенты выражения $l(\cdot)$ удовлетворяют условию

$$P_0(x) \in C[0,b],\ P_1(x) \in C^1[0,b], ...,\ P_{n-2}(x) \in C^{n-2}[0,b]. \qquad (2)$$

Согласно известной теореме М. Отелбаева [**3**] область определения такого оператора описывается с помощью набора n функций $l_1(\cdot), \ldots, l_n(\cdot)$ из пространства $L_2[0, b]$.

Литература

[**1**] Садовничий В. А., Кангужин Б. Е., *О связи между спектром дифференциального оператора с симметричными коэффициентами и краевыми условиями* // ДАН СССР. — 1982. — Т. 267, № 2. — С. 310–313. [**2**] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, М.: Наука, 1969. 528 с. [**3**] Кангужин Б. Е., *Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке.* Автореферат дисс. док. физ.-мат. н. 2005. Алматы. КазНУ им. аль-Фараби. 45 с.

Спектральные свойства краевой задачи со смещением для волнового уравнения

Н. А. Есиркегенов (Казахский национальный университет им. Аль-Фараби)

Пусть $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная отрезком $AB : 0 \leqslant x \leqslant 1$ оси $y = 0$ и характеристиками $AC : x - y = 0$, $BC : x + y = 1$ волнового уравнения

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + q(x, y)u = f(x, y). \tag{1}$$

Задача S**.** *Найти решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям*

$$au_x + bu_y \mid_{AB} = 0.$$
$$u(\Theta_0(t)) = \alpha u(\Theta_1(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $\Theta_0(t) = (\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$, $\Theta_1(t) = (\frac{t+1}{2}, \frac{1-t}{2})$. *Здесь* α, a, b *— произвольные комплексные числа.*

Задача S является обобщением простейшей краевой задачи со смещением, исследованной А. М. Нахушевым [**1**] для $f = 0$ и $q = 0$ с неоднородными граничными условиями.

Т. Ш. Кальменовым в [**2**] для случая $q = 0$ установлен следующий результат: *пусть* $ab = 0$*, тогда при* $\alpha = 0$ *задача* S *является вольтерровой, а при* $\alpha(\alpha+1) \neq 0$ *имеет полную систему собственных функций в* $L_2(\Omega)$. Доказательство основано на продолжении решения задачи в область Ω^*, симметричную Ω относительно оси $y = 0$ и решении задачи в квадрате $\Omega \bigcup \Omega^*$ методом разделения переменных.

В [**3**] также для случая $q = 0$ получен критерий корректности задачи S, и при $\alpha \neq 0$, доказана базисность Рисса в $L_2(\Omega)$ системы собственных и присоединенных функций.

Следует отметить, что в отличие от эллиптических уравнений, спектральная теория гиперболических задач не развита. Приведенные работы [**2**] и [**3**] практически исчерпывают работы по спектральным задачам для гиперболических уравнений в нетривиальных постановках. Рассмотрение спектральных задач для уравнения (1) при $q \neq 0$ в характеристическом треугольнике в нашей работе проводится впервые.

Теорема 1. *Пусть* $q(x, y) \in C(\overline{\Omega})$. *Тогда задача* S *при* $\alpha = 0$ *является вольтерровой краевой задачей, а при* $\alpha(\alpha + 1) \neq 0$ *система собственных и присоединенных функций задачи* S *полна в* $L_2(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* $q(x, y) = q(y) \in C[0, \frac{1}{2}]$. *Тогда при* $\alpha \neq 0$ *система собственных и присоединенных функций задачи* S *образует базис Рисса в* $L_2(\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть* $q(x, y) = q(x) \in C[0, 1]$. *Тогда система собственных и присоединенных функций задачи* S *при* $\alpha(|\alpha| - 1) \neq 0$ *образует базис Рисса в* $L_2(\Omega)$.

Замечание. В случае $\alpha = 1$, $a = 1$, $b = 0$ задача S при действительнозначном потенциале $q(x, y) \in C(\overline{\Omega})$ является самосопряженной краевой задачей и система ее собственных функций образует ортогональный базис в $L_2(\Omega)$. Однако можно построить пример такого комплекснозначного потенциала $q(x, y) = q(x)$, что система собственных и присоединенных функций задачи S не образует даже обычного базиса в $L_2(\Omega)$.

Литература

[**1**] Нахушев А. М., *О некоторых нелокальных краевых задачах со смещением для уравнения гиперболического и смешанного типа* // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 1. — С. 44–59. [**2**] Кальменов Т. Ш., *Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения* // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 1, № 1. — С. 75–78. [**3**] Садыбеков М. А., Орынбасаров Е. М., *Базисность системы собственных и присоединенных функций краевой задачи со смещением для волнового уравнения* // Матем. заметки. — 1992. — Т. 51, № 5. — С. 86–89.

Об одной гипотезе Дэвиса

Х. К. Ишкин (Башкирский государственный университет)

Рассмотрим оператор H_θ, порожденный в $L^2(0; \infty)$ дифференциальным выражением $h_\theta y = -y'' + e^{i\theta} x^\alpha y$ ($\alpha > 0$ и $0 < |\theta| < \pi$) и краевым условием $y(0)=0$. Известно (см., например, [**1**]), что собственные числа H_θ простые, лежат на луче $\arg\lambda = 2\theta/(2+\alpha)$ и имеют асимптотику

$$\lambda_n \sim C_0 \cdot e^{\frac{2\theta i}{2+\alpha}} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}, \quad C_0 > 0, \tag{1}$$

система собственных функций $\{f_n\}_1^\infty$ полна в $L^2(0,\infty)$. При $\theta = 0$ $\{f_n\}_1^\infty$ образуют ортонормированный базис в $L^2(0,\infty)$, оператор H_0 является спектрально устойчивым: если V — оператор умножения на функцию $V(x)$, удовлетворяющую условию

$$V \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,+\infty), \quad V(x) = o\left(x^\alpha\right), x \to +\infty, \tag{2}$$

то собственные числа $\{\mu_n\}_1^\infty$ оператора $L_\theta = H_\theta + V$ при надлежащей нумерации имеют асимптотику

$$\mu_n \sim \lambda_n,\ n \to \infty. \tag{3}$$

В работе [**2**] показано, что если $0 < |\theta| < \pi$ и $z = re^{i\beta}$, где $0 < \beta/\theta < 1$, то

$$\|(H_\theta - z)^{-1}\| \to \infty,\ z \to \infty. \tag{4}$$

Из результатов работы [**3**] следует, что соотношение (4) при $\alpha = 2$ верно и тогда, когда z уходит в ∞ по кривой $z = x + ix^a$, $1/3 < a \leqslant 1$. Численные расчеты, полученные в этой же работе, показывают, что постоянная $1/3$ является оптимальной. Аналогичная картина имеет место вблизи луча $\arg\lambda = 2\theta/(2+\alpha)$.

Сказанное означает, что спектральные свойства оператора L_θ при $\theta \neq 0$ могут сильно отличаться от свойств оператора L_0. Одно из таких спектральных свойств рассматривается в предлагаемом докладе. Прежде чем сформулировать это свойство, заметим, что в случае, когда функция V вещественна, оператор L_0 самосопряжен, так что многие его свойства (например, равенство Парсеваля [**4**]) могут быть получены, рассматривая L_0 как предел при $b \to \infty$ регулярных операторов $L_{0,b}$, порожденных в $L^2(0,b)$ выражением $l_0 y := h_0 y + Vy$ и краевыми условиями $y(0) = y(b) = 0$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №№ 09-01-00440-а, 08-01-97020.

Литература

[**1**] Лидский В. Б., *Несамосопряженный оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром* // Тр. ММО. — 1960. — Т. 9. — С. 45-79. [**2**] Davies E. B., *Pseudo-spectra, the harmonic oscillator and complex resonances* // Proc. R. Soc. Lond. —

1999. — V. 455. — P. 585–599. [**3**] Boulton L. S., *The Non-self-adjoint harmonic oscillator, compact semigroups and pseudospectra* // J. Oper. Theory. — 2002. — V. 47. — P. 413–429. [**4**] Левитан Б. М., *Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка.* М., Л.: Гостехиздат, 1950.

Формулы Фейнмана для броуновского листа со значениями в группе Ли

А. А. Калиниченко (Мех-мат МГУ)

В работе строятся приближения типа Фейнмана для интегралов по распределению броуновского листа со значениями в компактной группе Ли; при этом используется биинвариантная риманова метрика, порождаемая структурой группы Ли. Приближаемое распределение представляется как слабый предел мер, являющихся образами мер гауссовского типа на конечных декартовых степенях исходного многообразия.

В настоящее время не существует общепринятого определения двупараметрического броуновского движения со значениями в произвольном компактном римановом многообразии, однако в случае, когда многообразие оснащено структурой группы Ли, относительно которой его риманова метрика биинвариантна, такой процесс был построен в работах Лоренца–Эпперсона [**1**], и, по аналогии со случаем евклидового пространства, мы называем его «броуновским листом». Благодаря биинвариантности этот процесс обладает всеми характерными свойствами стандартного броуновского листа. В этой работе строится представление распределения броуновского листа со значениями в группе Ли как слабого предела мер, являющихся образами мер гауссовского типа на конечномерных пространствах. Для этого параметрическое множество разбивается на прямоугольники и непрерывное отображение из прямоугольнока $[0,1] \times [0,1]$ в многообразие M восстанавливается при помощи произвольной интерполяции, удовлетворяющей нескольким естественным условиям. Таким образом получается вложение $M^n \to C([0,1] \times [0,1], M)$, с помощью которого меры гауссовского типа на M^n переносятся на $C([0,1] \times [0,1], M)$, и, при неограниченном измельчении разбиения, их слабый предел совпадает с распределением броуновского листа.

Формулы для переходных вероятностей приближающих мер являются обобщениями аналогичных выражений, использующихся [**2**] при аппроксимации однопараметрического броуновского движения на компактном многообразии. По аналогии с этим случаем, явные выражения полученных приближений мы называем «формулами Фейнмана».

Литература

[**1**] J. B. Epperson, T. Lohrenz, *Brownian motion and the heat semigroup on the path space of a compact Lie group* // Pacific Journal of Mathematics. — 1993. — V. 161, № 2. [**2**] O. G. Smolyanov, H. von Weizsacker, O. Wittich, *Chernoffs Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds* // Potential Analysis. — 2007. — V. 26, № 1. — P. 1–29.

Об интегро-дифференциальных уравнениях Барбашина с дробной частной производной Капуто

А. С. Калитвин (Липецкий госпедуниверситет)

Линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s), \tag{1}$$

где $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, $c(t,s)$, $m(t,s,\sigma)$ и $f(t,s)$ — заданные на $D = [a,b] \times [c,d]$, $D \times [c,d]$ и D соответственно измеримые функции, а интеграл понимается в смысле Лебега, обычно называют интегро-дифференциальным уравнением Барбашина (ИДУБ).

Основы теории начальных и краевых задач для ИДУБ (1) построены в [**1**]. При этом изучаемые задачи интерпретировались как начальные или краевые задачи для дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых пространствах с решениями, понимаемыми в классическом смысле, или сводились к интегральным уравнениям.

В первом случае ИДУБ (1) с начальным условием

$$x(t_0, s) = \varphi(s) \tag{2}$$

интерпретируется как задача Коши

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(t_0) = \varphi(s) \tag{3}$$

в банаховом пространстве X, где вектор-функции $x(t)$ и $f(t)$ определяются равенствами $x(t) := x(t,s)$ и $f(t) := f(t,s)$, оператор-функция $A(t)$ имеет вид

$$A(t)y(s) = c(t,s)y(s) + \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)y(\sigma)d\sigma, \tag{4}$$

а производная $x'(t)$ понимается в смысле Фреше. Условия на заданные функции $c(t,s)$, $m(t,s,\sigma)$, $f(t,s)$ и $\varphi(s)$, при которых задача (1)–(2) допускает представление в виде задачи (3) с сильно непрерывной оператор-функцией (4), приведены в [**1**]. При этих условиях задача (3) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение.

При применении метода интегральных уравнений задача (1)–(2) сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерра

$$x(t,s) = (Vx)(t,s) + g(t,s) \tag{5}$$

с частными интегралами, где V — линейный оператор Вольтерра с частными интегралами, имеющий нулевой спектральный радиус $r(V)$ в пространстве, в котором рассматривается уравнение (5). Условия, при которых $r(V) = 0$ в различных классах функциональных пространств E, содержатся в [**2**–**5**], при этом уравнение (5) имеет единственное решение в пространстве E. Если теперь задача (1)–(2) эквивалентна в E уравнению (5), то единственное решение в E имеет и задача (1)–(2). Отметим, что в [**6**] построены оператор Вольтерра с частными интегралами и непрерывными ядрами и банахово пространство, в котором спектральный радиус этого оператора отличен от нуля.

Будем рассматривать линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$({}^C D^{\alpha}_{a+,t} x)(t,s) = c(t,s)x(t,s) + \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s) \tag{6}$$

с левосторонней дробной частной производной по t порядка α в смысле Капуто, где $0 < \alpha \leqslant 1$. При $\alpha = 1$ дробная частная производная в левой части уравнения (6) является обычной частной производной по t функции $x(t,s)$, если $x'_t(t,s)$ существует, а само уравнение есть линейное (ИДУБ) (1). В связи с этим уравнение (6), при $0 < \alpha < 1$, назовем ИДУБ с дробной частной производной по t порядка α в смысле Капуто. Отметим, что линейные ИДУБ с дробной частной производной по t порядка α в смысле Римана–Лиувилля изучались в [**7**].

Напомним [**8**, **9**], что левосторонняя дробная частная производная по t и левосторонний дробный частный интеграл по t Римана-Лиувилля порядка α $(0 < \alpha < 1)$ функции $f(t,s)$ определяются соответственно равенствами

$$(D^{\alpha}_{a+,t} f)(t,s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_a^t \frac{f(\tau,s)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau,$$

$$(I^{\alpha}_{a+,t}f)(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t \frac{f(\tau,s)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau, \quad t > a,$$

где через $\Gamma(z)$ обозначена гамма-функция.

Дробная частная производная по t порядка α в смысле Капуто определяется равенством

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+,t}f)(t,s) = (D^{\alpha}_{a+,t}(f-g))(t,s), \text{где } g(t,s) \equiv f(a,s).$$

При $f(a,s) \equiv 0$, очевидно, ${}^{C}D^{\alpha}_{a+,t}f = D^{\alpha}_{a+,t}f$. Пусть $D = [a,b] \times [c,d]$ — конечный прямоугольник, $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций, $A_tC(D)$ — пространство непрерывных на D функций $f(t,s)$, абсолютно непрерывных по $t \in [a,b]$ при каждом $s \in [c,d]$, $C(L^1)$ — пространство измеримых на $D \times [c,d]$ функций $m(t,s,\sigma)$ которые непрерывны по $(t,s) \in D$ как функции со значениями в $L^1 = L^1([c,d])$.

Если $0 < \alpha < 1$ и $f \in A_tC(D)$, то в силу **[9]**

$$(I^{\alpha}_{a+,t})({}^{C}D^{\alpha}_{a+,t}f)(t,s) = f(t,s) - f(a,s). \tag{7}$$

ИДУБ (6) с дополнительным условием

$$x(a,s) = \varphi(s) \tag{8}$$

назовем задачей типа Коши. Под решением задачи (6), (8) будем понимать функцию $x \in C_t(D)$, удовлетворяющую соотношениям (6), (8). Применяя к обеим частям уравнения (6) дробный частный интеграл $I^{\alpha}_{a+,t}$ и учитывая (7), получим уравнение Вольтерра с частными интегралами и ядрами типа потенциала, эквивалентное задаче (6), (8) и имеющее в $C_t(D)$ единственное решение. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, заданные функции $c, f \in C(D)$, $m \in C(L^1)$ и $\varphi \in C([c,d])$. Тогда задача типа Коши (6), (8) имеет единственное решение в $C_t(D)$.*

В заключение отметим, что аналогичные условия разрешимости весовой задачи типа Коши с дробной частной производной по t порядка α в смысле Римана-Лиувилля получены в **[7]** при $\varphi(s) \equiv 0$ на $[c,d]$.

Литература

[1] Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P., *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.* New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. **[2]** Калитвин А. С., *Линейные операторы с частными интегралами.* Воронеж: ЦЧКИ, 2000. [**3**] Калитвин А. С., Калитвин В. А., *Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра–Фредгольма с частными интегралами.* Липецк: ЛГПУ, 2006. [**4**] Калитвин А. С., Фролова Е. В., *Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория.* Липецк: ЛГПУ, 2004. [**5**] Kalitvin A. S., *Spectral properties of partial operators of Volterra and Volterra–Fredholm type* // ZAA. — 1998. — V. 17, № 2. — P. 297–309. [**6**] Калитвин А. С., *Об операторах и уравнениях Вольтерра с частными интегралами* // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2012. — Воронеж: ВГУ, 2012. — С. 91–94. [**7**] Калитвин А. С., *О разрешимости задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения Барбашина с дробной частной производной Римана–Лиувилля* // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания. — Липецк: ЛГПУ, 2014. — С. 91–96. [**8**] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. [**9**] Kilbas A. A., Srivastava N. M., Trujllo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam-Boston-Heidelberg-London-New York-Oxford-Paris-San Diego-Francisco-Singapur-Sydney-Tokio: Elsevier Inc., 2006.

О нижней оценке для минимального собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля

Е. С. Карулина (Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ))

Рассматривается задача Штурма—Лиувилля

$$-y'' + qy - \lambda y = 0,$$
$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0,$$

где k_0, $k_1 \in \mathbb{R}$, а функция q принадлежит множеству

$$A_\gamma = \{q \in L_1[0,1] : q(x) \geqslant 0,\ \int_0^1 q^\gamma\,dx = 1\}$$

при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть $m_\gamma = \inf\limits_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q)$.

Теорема 1. *Если $\gamma \in [1/2, 1)$, то существует функция $q_* \in A_\gamma$, удовлетворяющая равенству $\lambda_1(q_*) = m_\gamma$.*

Теорема 2. *Пусть $k_0 = k_1 = 0$. Тогда при $\gamma \leqslant 1/2$ выполняется равенство $m_\gamma = 1$, а при $1 - 2/\pi^2 < \gamma < 1$ выполняется неравенство $m_\gamma < 1$.*

Ранее в [**5**] было найдено значение m_1. В частности, для условий Неймана было получено $m_1 = \lambda_1(\boldsymbol{\delta}_1) = 0.740174\,(\pm 10^{-6})$, где $\boldsymbol{\delta}_1$ — дельта-функция Дирака с носителем в точке 1.

Аналогичные результаты для некоторых других значений γ получены в работах одного из докладчиков (см., например, [**4**]). Подобные задачи рассматривались также в работах [**1–3**].

Доклад основан на совместной работе с А. А. Владимировым.
Работа поддержана РФФИ, проект № 14-01-31423.

Литература

[**1**] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, *Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля* // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51, № 3. — С. 73–144. [**2**] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, *О границах изменения собственного значения при изменении потенциала* // Доклады РАН. — 2003. — Т. 392, № 5. — С. 592–597. [**3**] С. С. Ежак, *Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием* // Соврем. матем. и её прилож. — 2007. — Т. 36. — С. 56–69. [**4**] Е. С. Карулина, *Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа* // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: науч. издание, под ред. Асташовой И. В. — 2012. — М.: ЮНИТИ-ДАНА — С. 560–607. [**5**] E. S. Karulina, A. A. Vladimirov, *The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue* // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 2013. — V. 54. — C. 101–118.

Качественные свойства решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях

Л. М. Кожевникова (Стерлитамакский филиал Башкирского госуниверситета)
А. А. Хаджи (Салаватский филиал Уфимского ГНТУ)

Для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения с нестепенными нелинейностями в произвольной неограниченной области $\Omega \subseteq R_n$, $n \geqslant 2$ рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathbf{x},\nabla u))_{x_\alpha} - a(x,u) = \sum_{\alpha=1}^{n}(\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha} - \Phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega; \quad u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

В работе доказаны существование и единственность, установлен принцип максимума и получена экспоненциальная оценка сверху решения задачи (1), характеризующая убывание на бесконечности.

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathbf{x},\xi)$, $\alpha = 1,\dots,n$, измеримы по $\mathbf{x}\in\Omega$ для $\xi\in R_n$, непрерывны по $\xi\in R_n$ для почти всех $\mathbf{x}\in\Omega$; функция

$a(\mathbf{x}, s)$ измерима по $\mathbf{x} \in \Omega$ для $s \in R$, непрерывна по $s \in R$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$. Пусть существуют положительные числа $\overline{a}$, $\widehat{a}$, $\overline{b}$, $\widehat{b}$ такие, что для любых $\mathbf{x} \in \Omega$, $\xi, \eta \in R_n$, $s, t \in R$ справедливы неравенства:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \xi)\xi_\alpha + a(\mathbf{x}, s)s \geqslant \overline{a} \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(\xi_\alpha) + \overline{b}M(s); \tag{2}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \overline{B}_\alpha(a_\alpha(\mathbf{x}, \xi)) \leqslant \widehat{a} \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(\xi_\alpha); \tag{3}$$

$$\overline{M}(a(\mathbf{x}, s)) \leqslant \widehat{b}M(s); \tag{4}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant 0; \tag{5}$$

$$(a(\mathbf{x}, s) - a(\mathbf{x}, t))(s - t) > 0, \quad s \neq t. \tag{6}$$

Здесь $M(z)$, $B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, \ldots, n$ являются N-функциями, $\overline{M}(z)$, $\overline{B}_\alpha(z)$, $\alpha = 1, \ldots, n$ — соответствующие дополнительные N-функции.

Определим функцию $h(t)$ следующим образом:

$$h(t) = t^{-\frac{1}{n}} \left(\prod_{i=1}^{n} B_i^{-1}(t) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Будем предполагать, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{h(t)}{t}\, dt$ сходится, тогда можно определить N-функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int\limits_0^{|z|} \frac{h(t)}{t}\, dt.$$

Если $\int\limits_1^\infty \frac{h(t)}{t}\, dt = \infty$, то полагаем $M(u) = B^*(u)$, если $\int\limits_1^\infty \frac{h(t)}{t}\, dt < \infty$, то $M(u)$ — произвольная N-функция.

Предполагаем, что N-функции $M(u) = \int\limits_0^{|u|} p(s)\, ds$, $B_\alpha(u) = \int\limits_0^{|u|} p_\alpha(s)\, ds$ удовлетворяют условию Δ_2 и:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \inf_{v \neq 0} \frac{p(\lambda v)}{p(v)} = \infty, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \inf_{v \neq 0} \frac{p_\alpha(\lambda v)}{p_\alpha(v)} = \infty, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2)–(7), *тогда существует единственное обобщенное решение* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1) *с функциями* $\Phi_\alpha \in L_{\overline{B}_\alpha}(\Omega)$, $\Phi_\alpha \in L_{\overline{M}}(\Omega)$.

Положим
$$\Lambda(z) = \sup_{t>0} \frac{B^*(zt)}{B^*(t)},$$
пусть $l \geqslant 1$ такое, что
$$t^{1/l-1}\Lambda(t^{1/(ln)}) \to 0 \text{ при } t \to 0. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2)–(8) *и* $\int\limits_1^\infty \frac{h(t)}{t}\,dt = \infty$. *Тогда для обобщенного решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1) *с функциями* $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = \overline{1,n}$, Φ *такими, что*
$$\overline{B}_\alpha(\Phi_\alpha),\ \overline{B}^*(\Phi) \in L_{l/(l-1)}(\Omega), \quad l \geqslant 1,$$
справедлива оценка
$$\sup_\Omega |u| \leqslant C.$$

Заметим, что в случае $\int\limits_1^\infty \frac{h(t)}{t}\,dt < \infty$ ограниченность решения следует из теоремы вложения.

Для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_s, $s = 2,\ldots,n$ (сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто при любом $r > 0$) получена оценка скорости убывания решения при $x_s \to \infty$. Предполагаем, что:
$$\operatorname{supp}\Phi \subset \Omega^{R_0}, \quad \operatorname{supp}\Phi_\alpha \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0, \quad \alpha = 1,2,\ldots,n, \tag{9}$$
$$B_s(z) \leqslant cB_1(z), \quad z \leqslant z_0. \tag{10}$$

Определим функцию
$$\nu_1(r) = \inf_{v\in C_0^\infty(\Omega)} \sup\left\{z : \int\limits_{\gamma_r} B_1(zv)d\mathbf{x}' \leqslant \int\limits_{\gamma_r} B_1(v_{x_1})d\mathbf{x}'\right\},$$
где $\mathbf{x}' = \{x_1,...,x_{s-1},x_{s+1},...,x_n\}$, считаем, что область Ω удовлетворяет условиям
$$\int\limits_1^\infty \nu_1(r)dr = \infty, \quad \nu_1(r) \leqslant \nu_1, \quad r \geqslant 2R_0. \tag{11}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (9)–(11), *область* Ω *расположена вдоль оси* Ox_s, *тогда существуют положительные числа* κ, $\mathcal{M}$ *такие, что ограниченное решение* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1) *при всех* $r \geqslant 2R_0$ *подчиняется оценке*

$$\int\limits_{\Omega\cap\{x_s>r\}} M(u)\,d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega\cap\{x_s>r\}} B_\alpha(u_{x_\alpha})\,d\mathbf{x} \leqslant \mathcal{M}\exp\left(-\kappa\int\limits_1^r \nu_1(\rho)\,d\rho\right).$$

Ранее аналогичные результаты установлены авторами для анизотропных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями [**1**–**2**].

Литература

[**1**] Кожевникова Л. М., Хаджи А. А., *Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 1 (30). — С. 90–96. [**2**] Кожевникова Л. М., Хаджи А. А., *Ограниченность решений анизотропных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях* // Уфимский матем. журн. — 2014. — Т. 6, № 2.

Об аналоге теоремы Орлова для дифференциальных операторов четного порядка с сингулярными коэффициентами

Н. Н. Конечная (Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова)

Пусть вещественные функции $p_0(x)$, $p_1(x)$,…, $p_n(x)$, $q_0(x)$, $q_1(x)$,…, $q_{n-1}(x)$ определены и измеримы на полуоси $I := [1;+\infty)$, а функции

$$p_0,\, p_0^{-1},\, p_1^2p_0^{-1},\, \ldots,\, p_n^2p_0^{-1},\, q_0^2p_0^{-1},\, \ldots,\, q_{n-1}^2p_0^{-1}$$

локально интегрируемы по Лебегу на I, $n \in \mathcal{N}$. Определим квазипроизводные $y^{[0]}$, $y^{[1]}$, $y^{[2]}$, …, $y^{[2n-1]}$ локально абсолютно непрерывной на I функции y, полагая

$$y^{[k]} = y^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$y^{[n]} = p_0y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\varphi_k y^{(n-k)},$$

$$y^{[n+k]} = (y^{[n+k-1]})' + \overline{\varphi_k}y^{(n)} - \sum_{j=k}^{n-1}\psi_{kj}y^{(n-1+k-j)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где

$$\varphi_k = p_k + iq_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\psi_{kj} = (-1)^{j+k} C_{j+1}^k [p_{j+1} + i(1 - \frac{2k}{j+1}) q_j]$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n-1, k = 1, 2, \ldots, j),$$

и квазидифференциальное выражение, полагая

$$l_{2n}[y] := (-1)^n [(y^{[2n-1]})' + \overline{\varphi_n} y^{(n)}].$$

Известно, что выражение $l_{2n}[y]$ определяет минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$ интегрируемых с квадратом модуля функций на полуоси I. В еще неопубликованной совместной работе Мирзоева К. А. и Шкаликова А. А. показано, что оператор L_0 можно рассматривать как оператор, порождённый выражением

$$l_{2n}[y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} (p_k^{(k)} y^{(n-k)})^{(n-k)} +$$
$$+ i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \{ (q_k^{(k)} y^{(n-k-1)})^{(n-k)} + (q_k^{(k)} y^{(n-k)})^{(n-k-1)} \},$$

в пространстве $\mathcal{L}^2(I)$, где всюду производные понимаются в смысле теории распределений.

Доклад посвящен установлению аналога теоремы С. А. Орлова (см. [**1**]) для уравнения $l_{2n}[y] = \lambda y$, где $\lambda \in C$. Полученная теорема позволяет построить примеры дифференциальных операторов четного порядка с сингулярными коэффициентами и с всевозможными допустимыми равными дефектными числами. Отметим, что аналог теоремы С. А. Орлова для симметрических классических квазидифференциальных выражений был получен в работах [**2**] и [**3**].

Доклад основан на совместной работе с К. А. Мирзоевым.

Литература

[**1**] Орлов С. А., *Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов* // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 92, № 3. — С. 483–486. [**2**] Мирзоев К. А., *О теореме Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов* // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380, № 5. — С. 591-595. [**3**] Долгих И. Н., Мирзоев К. А. *Индексы*

дефекта и спектр самосопряжённых расширений некоторых классов дифференциальных операторов // Математический сборник. — 2006. — Т. 197, № 4. — С. 53–74.

О комплексных собственных значениях эллиптического оператора

А. Б. Костин (Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ»)

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^2$ рассматривается задача на собственные значения

$$Lw + \lambda w = 0, \quad x \in \Omega; \qquad \mathcal{B}w = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1}$$

где

$$Lw = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x)w$$

— равномерно эллиптический оператор с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$; $b_i, c \in L_\infty(\Omega)$, $\nu > 0$ — константа эллиптичности. При этом считаем, что

$$c(x) \leqslant -q, \quad q \in \mathbb{R}, \quad b = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}\{|\mathbf{b}(x)|\},$$

$$|\mathbf{b}(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x), \quad b > 0,$$

и обозначим $p = \frac{\nu}{b^2}$. Граничные условия имеют вид $\mathcal{B}w \equiv w$ либо $\mathcal{B}w \equiv \partial w/\partial N + \sigma(x)w$ на $\partial\Omega$,

$$\frac{\partial w}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} \cos(\mathbf{n}, x_i)\, a_{ij}(x)\, \frac{\partial w}{\partial x_j}$$

— производная по конормали, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\sigma \in C^1(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \geqslant 0$ на $\partial\Omega$. Известно, что всякое решение задачи (1) $w(x) = u(x) + iv(x)$ принадлежит пространству С. Л. Соболева $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяет уравнению п. в. в Ω и граничным условиям в смысле теории следов. В работе **[1]** для задачи (1) в круге $\Omega = \{x = (x_1, x_2)\,|\, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ с условием Дирихле и оператором

$$Lw = \Delta w + b_1(x)\frac{\partial w}{\partial x_1} + b_2(x)\frac{\partial w}{\partial x_2} + c(x)w$$

доказано, что всякое собственное значение $\lambda = \alpha + i\beta$ удовлетворяет неравенству

$$|\beta| \leqslant \sqrt{2}\, \max_{\overline{\Omega}}\{|b_1(x)|, |b_2(x)|\} \sqrt{\alpha + \frac{1}{2}\max_{\overline{\Omega}}\{|div\, \mathbf{b}(x) - 2c(x)|\}}. \qquad (2)$$

В работе **[2]** для ограниченной области Ω доказано, что все собственные значения задачи (1) (с $\mathcal{B}\, w \equiv w$) лежат на комплексной плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ внутри параболы вида $\alpha^2 = k(\beta - \beta_0)$ с некоторыми постоянными $k > 0$ и β_0, явный вид которых не выписывался. В **[3]** доказано, что собственные значения абсолютно эллиптических граничных задач расположены в некотором угле на плоскости $\mathbb{C}_\lambda$, а в работе **[4]**, в частности, установлено существование комплексных собственных значений для задачи с наклонной производной.

В настоящей работе доказано, что собственные значения задачи (1) и других, более общих краевых задач для эллиптического оператора L, лежат во множестве $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{C}_\lambda$, которое может быть задано неравенствами

$$\mathcal{D}_0 = \begin{cases} \alpha \geqslant p\,\beta^2 - |\beta| + q, & \text{если } |\beta| \geqslant \frac{1}{2p}; \\ \alpha \geqslant q - \frac{1}{4p}, & \text{если } |\beta| \leqslant \frac{1}{2p}. \end{cases} \qquad (3)$$

Получены примеры, показывающие “асимптотическую точность” множества $\mathcal{D}_0$. Под последним понимается следующее.

Определение. Обозначим $\Lambda \subset \mathcal{D}_0$ — множество всех собственных значений задачи (1). Множество $\mathcal{D}_0$ на комплексной плоскости будем называть асимптотически точным для множества Λ, если найдутся последовательности $\{\lambda_n\}$ точек Λ и $\{z_n\}$ точек $\partial\mathcal{D}_0$ такие, что $\operatorname{Re}\lambda_n \sim \operatorname{Re} z_n$ и $\operatorname{Im}\lambda_n \sim \operatorname{Im} z_n$ при $n \to \infty$.

Дадим пример задачи Дирихле для уравнения с младшими членами, имеющей комплексные собственные значения.

Пример. В круге $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ рассмотрим задачу

$$\Delta w + y w_x - x w_y + \lambda w = 0,\ (x, y) \in D;\ w(x, y) = 0,\ (x, y) \in \partial D.$$

В полярных координатах собственные функции и собственные значения этой задачи легко находятся

$$w_{n,k}(r, \varphi) = J_n(\gamma_k(n) r) \exp(\pm i n\varphi), \quad \lambda_{n,k} = \gamma_k^2(n) \pm i n,$$

где $k \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь $J_n(\gamma)$ — функция Бесселя порядка n, а $\gamma_k(n)$ — положительные корни уравнения $J_n(\gamma) = 0$, занумерованные в порядке возрастания. Функции $w_{n,k}$ аналитические в $\mathbb{R}^2$, а система $\{w_{n,k}\}$ полна и ортогональна в $L_2(D)$. Отсюда следует, что $\Lambda = \{w_{n,k}\}$ — множество всех собственных значений задачи. Для этого примера $\nu = 1$, $b = 1$, $p = 1$, $q = 0$, а множество $\mathcal{D}_0$ из (3) можно задать неравенством $2|\beta| - 1 \leqslant \sqrt{1 + 4\alpha}$. Воспользовавшись известной асимптотикой нулей функции Бесселя, $\gamma_1(n) = n + C\sqrt{[3]n} + O(1)$ (см. [**5**: С. 568]), можно убедиться, что для этого примера множество $\mathcal{D}_0$ является асимптотически точным для Λ.

Этот пример дал возможность построить примеры неединственности решения в линейных обратных задачах с финальным наблюдением для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений (см. [**6**, **7**]).

Отметим, что множество на комплексной плоскости, задаваемое неравенством (2) из работы [**1**], а также внутренность параболы из работы [**2**] (известной параболы Карлемана или Гепперта–Карлемана) не являются асимптотически точными. Эти множества содержат в себе множество $\mathcal{D}_0$, заданное в (3).

Литература

[**1**] Geppert H. // Math. Ann. — 1927. — B. 98, № 2. — S. 264–272. [**2**] Carleman T. // Ber. Der Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phyz. Kl. — 1936. — V. 88. — P. 119–132. [**3**] Agmon S. // Commun. Pure and Appl. Math. — 1962. — V. 15. — P. 119–147. [**4**] Ильин В. А., Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 1. — С. 128–143. [**5**] Ватсон Г. Н., *Теория бесселевых функций.* М., 1949. Т. 1. [**6**] Костин А. Б. // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 453, № 2. — С. 138–141. [**7**] Костин А. Б. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. — 2014. — Т. 54, № 5. — С. 779–792.

Отображения в некоммутативные алгебры

М. Н. Крейн (ЛГПУ, Липецк)

I. Отображения 1-й степени. Отображения первой степени в некоммутативной алгебре $\mathcal{A}$ — это отображения вида $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$, где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — фиксированные элементы алгебры $\mathcal{A}$. Они введены автором и являются обобщением понятия линейных отображений. Основные результаты изучения отображений первой степени изложены в [**1**, **2**, **3**]. Приведу здесь некоторые из них.

Множество отображений первой степени само образует алгебру $d_1(\mathcal{A})$ с поточечным сложением и композицией отображений в качестве умножения, нормированную, если нормирована $\mathcal{A}$ ($\|f\| =$

$\sup_{\|x\|=1} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$). Через $\widetilde{\mathcal{A}}$ обозначена алгебра, полученная из $\mathcal{A}$ изменением порядка сомножителей на противоположный. Существует эпиморфизм алгебр $h : \mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}} \to d_1(\mathcal{A})$, сопоставляющий элементу $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ из $\mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}}$ отображение $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x b_i$.

Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ *обладает свойством* $(*)$, если она является, с точностью до изоморфизма, такой алгеброй линейных операторов некоторого линейного пространства E, что для любой конечной линейно независимой системы $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ и любой системы из такого же количества элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n \in E$ найдется оператор в $\mathcal{A}$, переводящий 1-ю систему во 2-ю. Если E конечномерно, то свойством $(*)$ обладает только алгебра всех линейных операторов, действующих в E. Если же E бесконечномерно, то это свойство имеется не только у алгебры всех линейных операторов, но и у некоторых ее подалгебр, например, в случае нормированного пространства, у алгебры всех ограниченных линейных операторов, у алгебры компактных линейных операторов.

Теорема 1 [**2**]. *Если алгебра $\mathcal{A}$ обладает свойством $(*)$, то эпиморфизм $h : \mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}} \to d_1(\mathcal{A})$ является изоморфизмом.*

Теорема 2 [**3**, теорема 1]. *Для алгебры кватернионов эпиморфизм h является изоморфизмом.* (Алгебра кватернионов не обладает свойством $(*)$.)

Теорема 3 [**3**, теорема 2]. *Если $\mathcal{A} = T_n$ — алгебра треугольных матриц размера $n \times n$, то эпиморфизм h имеет ядро размерности $\frac{1}{24}n(n^2-1)(5n+6)$. Размерность алгебры $d_1(\mathcal{A})$ при этом равна $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$.*

Пусть $\widehat{d_1(\mathcal{A})}$ означает замыкание $d_1(\mathcal{A})$ в топологии поточечной сходимости.

Теорема 4 [**3**, теорема 3]. *Для алгебры $\mathcal{A} = C(H)$ линейных компактных операторов сепарабельного гильбертова пространства H $\widehat{d_1(\mathcal{A})} = B(A)$, где A — банахово пространство, полученное из $\mathcal{A}$ игнорированием умножения элементов, $B(A)$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве A.*

Пусть $L(A)$ — множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве A.

Теорема 5 [**1**, теорема 2.3]. *Если $\mathcal{A} = L(F^n)$ — алгебра линейных операторов конечномерного пространства, то $d_1(\mathcal{A}) = L(A)$.*

В [**1**] и [**2**] рассмотрены также некоторые топологические свойства алгебры отображений первой степени.

II. Многочлены и аналитические функции, дифференциалы и дифференциальные уравнения в некоммутативных алгебрах. По аналогии с отображениями первой степени в некоммутативной алгебре $\mathcal{A}$ определяются отображения (или однородные многочлены) n-й степени ($n > 1$):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_{i1} x a_{i2} x a_{i3} \cdots a_{in} x a_{i,n+1}.$$

Здесь в каждом слагаемом x встречается в качестве сомножителя n раз; a_{ij} — элементы алгебры, среди которых могут быть единицы. Количество слагаемых k не связано с n. Отображением нулевой степени естественно назвать отображение, тождественно равное некоторому ненулевому элементу алгебры. Сумму конечного числа однородных многочленов назовем многочленом степени n, где n — максимальная из степеней слагаемых. Эту сумму можно рассматривать и как формальную сумму, и как сумму отображений. Если алгебра имеет единицу, то множество таких многочленов включает в себя множество классических многочленов с коэффициентами из поля, над которым определена алгебра. Определив обычным образом операции сложения и умножения многочленов и умножения многочленов на элементы поля так, чтобы выполнялись привычные правила раскрытия скобок, получим градуированную алгебру $P(\mathcal{A}) = \oplus_{n=1}^{\infty} P_n(\mathcal{A})$, где $P_n(\mathcal{A})$ — множество многочленов (отображений) n-й степени. Очевидно, "приращение" отображения $f(x)$ из $P(\mathcal{A})$, возникающее при "приращении" аргумента, является многочленом от "приращения" аргумента, где слагаемое первой степени оказывается "производной" или "дифференциалом" исходного отображения. Это отображение первой степени от "приращения" с коэффициентами, являющимися многочленами от x, $df(x) \in d_1(\mathcal{A})$. В "хороших" случаях, о которых говорилось выше, $d_1(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}}$. Тогда $d^2 f(x) = d(df(x)) \in d_1(\mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}}) = (\mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}}) \otimes (\widetilde{\mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}}}) = \mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A}$, и т.д., $d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x)$. Соотношение $F(x, f(x), df(x), , \ldots, d^k f(x)) = 0$ естественно назвать дифференциальным уравнением для отображений алгебры $\mathcal{A}$.

В нормированной алгебре можно определить аналитическую функцию как ряд однородных многочленов $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)$, сформулировать достаточные условия сходимости такого ряда, указать формулы для нахождения радиуса сходимости и существования "дифференциалов".

III. Об отображениях конечномерных многообразий в некоммутативные алгебры. При алгебраическом подходе к изучению дифференциальных уравнений, основы которого изложены в [**4**], используется отождествление конечномерного многообразия, на котором заданы действительные функции, со спектром алгебры этих функций. При замене действительных функций на отображения в некоммутативную алгебру получен следующий результат.

Пусть K — нормированная алгебра, в общем случае некоммутативная, над полем k, содержащем поле действительных чисел $\mathbb{R}$, с открытым множеством обратимых элементов (например, операторная алгебра), M — хаусдорфово топологическое пространство, $\mathcal{F} = C_K(M)$ — алгебра непрерывных функций из M в K с поточечно определенными операциями, которая также некоммутативна, если некоммутативна K, $|\mathcal{F}|$ — множество k-гомоморфизмов из $\mathcal{F}$ в K с базой топологии $\{f^{-1}(V)|V \subset K$ — открыто, $f \in |\mathcal{F}|\}$, $\theta : M \to |\mathcal{F}|$ — отображение, задаваемое формулой $[\theta(p)](f) = f(p)$.

Теорема 6 [**5**]. *Пусть M — конечномерное многообразие. Тогда 1) θ инъективно; 2) всякий гомоморфизм из $|\mathcal{F}|$ представляется в виде суммы $\theta(p)$ для некоторого $p \in M$ и отображения β, все значения которого необратимы в K.*

Литература

[**1**] Krein M. N., *The mappings of degree* 1 // Abstract and Applied Analysis. Special Issue. — `http://www.hindawi.com/journals/aaa/2006/090837/abs/` [**2**] Крейн М. Н., *О структуре алгебры отображений* 1*-й степени* // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна — 2006. — С. 114–116. [**3**] Крейн М. Н., *Алгебраические и топологические свойства некоторых классов отображений первой степени* // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна — 2008. — С. 194–203. [**4**] Джет Неструев. *Гладкие многообразия и наблюдаемые.* М.: МЦНМО. 2000. [**5**] Крейн М. Н., *Об отображениях в некоммутативные алгебры* // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2014». — Воронеж: Научная книга, 2014. — С. 179–182.

О семействах экстремальных мер в двумерной задаче равновесия логарифмического потенциала во внешнем поле с матрицей взаимодействия Никишина

М. А. Лапик (ИПМ им. М. В. Келдыша)

Рассматриваются векторные экстремальные задачи теории логарифмического потенциала с переменным весом в поле на примере двумерных задач с матрицей взаимодействия Никишина. Точнее, задачи о минимизации функционала энергии

$$I(\overline{\mu}) := \int \Big(2U^{\mu_1} - U^{\mu_2} + 2Q_1\Big) d\mu_1 + \int \Big(-U^{\mu_1} + 2U^{\mu_2} + 2Q_1\Big) d\mu_1$$

в классе мер

$$\mathcal{M}^x = \{\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2), \quad S_{\mu_i} \subseteq \Gamma_i, \quad i = 1, 2; \quad \mu_1(\Gamma_1) = 2x, \quad \mu_2(\Gamma_2) = x\},$$

где $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_i\}_{i=1}^2$ — непересекающиеся регулярные компакты в $\mathbb{C}$ с пустой внутренностью.

Получены интегральные формулы для восстановления меры массы x в поле по носителям равновесных мер без поля массы $(0, x)$.

Об одном классе ядер Дирихле и Валле-Пуссена–Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье

Л. Н. Ляхов (Воронежский государственный университет)

B-ядра Дирихле. Пусть J_ν — функция Бесселя первого рода. j-Функцией Бесселя называется функция (см. [**1**, **2**]) $j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x)$, $\nu > -\frac{1}{2}$. Для произвольного положительного числа γ выражение

$$F_B[f](\xi) = \int\limits_0^\infty f(x)\; j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) x^\gamma \, dx$$

называется *j-преобразованием Ганкеля (Фурье–Бесселя)* функции f.

Для всех $x \in [0, \infty)$ и $\lambda > 0$ положим

$$(1)_\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, l) \\ 0, & x \notin [0, l). \end{cases}$$

j-Преобразование Ганкеля этой функции вычисляется по формуле

$$F_B[(1)_\lambda](\xi) = -\frac{\lambda^\gamma}{\xi}\, j\,'_\nu(\lambda\xi) = \frac{\lambda^{\gamma+1}\, j_{\nu+1}(l\xi)}{\gamma+1}, \qquad \nu = \frac{\gamma-1}{2}.$$

Функцию одного переменного

$$\mathbb{D}_{\gamma,\lambda}(\xi) = -\frac{\lambda^\gamma}{\xi^{\gamma+1}}\, j\,'_\nu(\lambda\xi), \qquad \nu = \frac{\gamma+1}{2}$$

будем называть B-ядром Дирихле для j-преобразования Ганкеля.

Теперь пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. Рассмотрим случай многих переменных, полагая B-ядро Дирихле, отвечающее весовому индексу γ, равным произведению n B-ядер одного переменного (как и в классическом случае, см. [**3**, С. 297]):

$$\mathbb{D}_{\gamma,l}(t) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{D}_{\gamma_j,l_j}(t) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{l^{\gamma_j}}{t_j^{\gamma_j+1}} \quad j'_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(l_j t_j).$$

B-ядра Валле-Пуссена-Никольского. Ядра Валле-Пуссена представляют собой среднее арифметическое ядер Дирихле. Н. Н. Ахиезер и Б. М. Левитан изучали более общие ядра Валле-Пуссена, отвечающие более общим тригонометрическим рядам. С. М. Никольский ввел аналоги ядер Валле-Пуссена для интегралов Фурье в виде интегральных средних ядер Дирихле (см. так же монографию [**3**, Глава 8, п. 8.6]). Эти функции называются ядрами Валле-Пуссена–Никольского (сокращенно — ядра VPN). В данной работе используются конструкции С. М. Никольского.

Положим $l^\gamma = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i > 0$ и пусть $|\Omega_M|_\gamma$ — весовая мера множества

$$\Omega_M = \{l \in R_n^+,\ M < \lambda_i < 2M\} :$$
$$: |\Omega_M|_\gamma = \int\limits_{\Omega_M} \lambda^\gamma \, d\lambda = M^{2n+|\gamma|} \prod_{i=1}^{n} \frac{2^{\gamma_i+1}-1}{\gamma_i+1}.$$

Функцию

$$\mathbb{V}_{\gamma,\Omega_M}(t) = \frac{C(n,\gamma)}{|\vee_M|_{\gamma+1}} \int\limits_{\Omega_M} \mathbb{D}_{\gamma,\lambda}(t) d\lambda$$
$$= \frac{C(n,\gamma)}{|\Omega_M|_{\gamma+1}} \int\limits_{\Omega_M} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j^{\gamma_j+1}} \, j'_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(\lambda_j t_j) \, l^\gamma \, d\lambda$$

с нормирующей константой

$$C(n,\gamma) = \frac{(-1)^n}{\pi^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \ \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

будем называть B-ядром Валле-Пуссена–Никольского или B-ядром VPN.

Нормирующя константа $C(n,\gamma)$ выбрана так, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_{R_n^+} \mathbb{V}_{\gamma,M}(t)t^\gamma dt = 1.$$

Доказательство этого равенства опирается на формулу

$$\int\limits_0^\infty \frac{j\,'_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(\lambda_j t_j)}{t_j} dt_j = -\frac{\pi\,\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{\gamma_j\Gamma\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\, l_j.$$

Лемма 1. $\mathbb{V}_{\gamma,M}(t) \in L_1^\gamma(R_n^+)$. *При этом*

$$\int\limits_{R_n^+} |V_{\gamma,M}(t)|\, t^\gamma\, dt \le A < \infty,$$

где при $M > 1$ константа A не зависит от M.

Обобщенные свертки с B-ядром VPN. Рассмотрим обобщенную свертку следующего вида

$$\sigma_M(f,x) = \int\limits_{R_n^+} T^x\left(\mathbb{V}_{\gamma,M}(y)\right)\, f(y) y^\gamma\, dy.$$

Теорема 1. *Если $f \in L_p^\gamma$, то $\sigma_{\gamma,M}(f,x) \in L_p^\gamma$.*

Литература

[**1**] Левитан Б. М., *Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя* // УМН. — 1951. — Т. 6, № 2. — С. 102–143. [**2**] Киприянов И. А., *Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука, 1997. [**3**] Никольский С. М., *Приближения функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1977.

Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом на полуоси

А. Э. Маматов (Тошкентский университет информационных технологии)

О. Р. Аллаберганов (Ургенчский государственный университет)

В этой работе изучается обратная задача на полуоси для оператора Штурма–Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом. Ранее аналогичные задачи исследованы в работах [**1**–**4**].

Рассмотрим на полуоси следующую граничную задачу

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \tag{2}$$

где $q(x)$ — бесконечнозонный потенциал (определение и обозначения см. в [**4**]).

Для задачи (1)–(2) функция Вейля–Титчмарша имеет вид $m_\alpha(\lambda) = (C(\lambda) + i\sqrt{f(\lambda)})/A(\lambda)$, где

$$f(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k},$$

$$A(\lambda) = h(\lambda)\sin^2\alpha + g(\lambda)\cos^2\alpha + k(\lambda)\sin 2\alpha,$$

$$C(\lambda) = (h(\lambda) - g(\lambda))\sin\alpha\cos\alpha + k(\lambda)\cos 2\alpha.$$

Из вида функции Вейля–Титчмарша вытекает, что непрерывный спектр задачи (1)–(2) состоит из следующего множества

$$E_{ess} = R^1 \setminus \left\{ (-\infty, 0) \bigcup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_k,\ \mu_k) \right\}.$$

Обозначим через ξ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ нули функции $A(\lambda)$. Используя теорему Руше нетрудно показать, что $\xi_0 \in (-\infty,\ 0]$, $\xi_n \in [\lambda_n, \mu_n]$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 1. Числа ξ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и знаки $\sigma_n = \operatorname{sign} C(\xi_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются спектральными параметрами задачи (1)–(2).

Определение 2. Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и границы $\lambda_0, \lambda_n, \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots$ непрерывного спектра назовем спектральными данными задачи (1)–(2).

Восстановление коэффициента $q(x)$ и граничного условия задачи (1)–(2) по спектральным данным называют обратной задачей.

Теорема 1. *Пусть ξ_n, σ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ спектральные параметры и E_{ess} непрерывный спектр задачи* (1)–(2)*. Тогда непрерывный спектр следующей задачи*

$$\begin{cases} -y'' + q(x+t)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\ \pi) \end{cases} \tag{3}$$

не зависит от действительного параметра t и спектральные параметры $\xi_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений Дубровина–Трубовица

$$\xi_0'(t) = \frac{-2[\operatorname{ctg}^2\alpha + \xi_0(t) - q(t)]\sigma_0(t)\sqrt{-f(\xi_0(t))}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\xi_0(t)}{\lambda_k}},$$

$$\xi_n'(t) = \frac{-2\lambda_n[ctg^2\alpha + \xi_n(t) - q(t)]\sigma_n(t)\sqrt{-f(\xi_n(t))}}{(\xi_0(t) - \xi_n(t)) \cdot \prod\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\xi_n(t)}{\lambda_k}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а также начальным условиям $\xi_k(0) = \xi_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Знак $\sigma_k(t)$ меняется при каждом столкновении $\xi_k(t)$ с границами своей лакуны ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Теорема 2. *Имеют места следующие формулы:*

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n\sqrt{-f(\xi_n)}}{A_1'(\xi_n)},$$

$$q(t) = 2\operatorname{ctg}^2\alpha + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t)),$$

где

$$A_1(\lambda) = (\lambda - \xi_0)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k}$$

и $\xi_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ спектральные параметры задачи (3).

Литература

[**1**] Ахиезер Н. И., *Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов* // ДАН СССР. — 1961. — Т. 141, № 2. — С. 262–266. [**2**] Hochstadt H., Goldberg W., *An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum* // J. Math. Anal. and Appl. — 1985. — V. 105. — P. 206–221. [**3**] Левитан Б. М., Савин А. В., *Обратная задача на полупрямой для конечнозонных потенциалов* // Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, математика, механика. — 1988. — № 1. — С. 21–28. [**4**] Левитан Б. М., *Обратные задачи Штурма–Лиувилля.* М.: Наука, 1984.

Об интегрировании модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с источником в случае конечной плотности

К. А. Мамедов (Ургенчский Государственный Университет им. Аль-Хорезми)

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = \sum_{k=1}^{2N} \left(\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2 \right), \\ L\Phi_k = \xi_k \Phi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, 2N, \quad x \in R \end{cases} \tag{1}$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^1, \tag{2}$$

где

$$u_0(x) \to c \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \quad x \in R^1,$$

$$L\left(t\right) = i \begin{pmatrix} d/dx & -u(x,t) \\ -u(x,t) & -d/dx \end{pmatrix},$$

$\Phi_k = (\Phi_{k1}, \Phi_{k2})^T$. Собственная вектор функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k так, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k1} \Phi_{k2} dx = A_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, 2N. \tag{3}$$

Здесь $A_k(t)$ заданные, непрерывные, ненулевые функции, которые удовлетворяют условиям

$$A_k(t) = A_n(t) i \quad \text{при} \quad \xi k = -\xi_n. \tag{4}$$

Предполагаем, что функция $u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т. ч.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|) |u(x,t) - c| + \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial^k u\left(x,t\right)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \tag{5}$$

Основная цель работы — получить представления для решений $u(x, t)$, $C_k\left(x, t\right)$, $k = 1, 2, \ldots, 2N$ задачи (1)–(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ)

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

встречается при решении некоторых задач физики плазмы. Это уравнение в классе быстроубывающих функции методом обратной задачи рассеяния было проинтегрировано в работе [**1**].

N-солитонное решение мКдФ в случае конечной плотности, т. е.

$$u(x,t) \to C \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \quad x \in R^1,$$

было найдено в работе [**2**].

Литература

[**1**] Wadati M. // J. Phys. Soc. Japan. — 1971. — V. 32. — P. 1681. [**2**] Романова Н. Н. // ТМФ. — 1979. — Т. 39, № 2. — С. 205–220.

Разрешимость задачи Коши для мерозначного уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в произвольной области

О. А. Манита (мех-мат МГУ)

Ряд моделей физики приводит к уравнениям для конечных мер на $\mathbb{R}^d$ вида

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x^i x^j}\left(a^{ij}\mu_t\right) - \partial_{x^i}\left(b^i \mu_t\right) + c\mu_t$$

с отрицательным потенциалом c. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Традиционно большой интерес прикован к уравнениям Колмогорова–Фоккера–Планка *без потенциала* (случай $c = 0$) для ограниченных борелевских мер, то есть уравнениям

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x^i x^j}\left(a^{ij}\mu_t\right) - \partial_{x^i}\left(b^i \mu_t\right). \tag{1}$$

Подобные уравнения для переходных вероятностей диффузионного процесса были выведены А. Н. Колмогоровым в известной работе «Об аналитических методах теории вероятностей». В этой же работе поставлен вопрос о существовании и единственности решения, заданного потоком вероятностных мер. Стоит отметить, что решение уравнения (1) сохраняет полную меру пространства, поэтому естественно рассматривать подобные уравнения в пространстве вероятностных мер.

Обычно рассматриваются уравнения для мер на всем пространстве $\mathbb{R}^d$ (см. например [**2**, **3**, **1**]). Вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова на произвольной области $D \subset \mathbb{R}^d$ мало изучен (см. [**4**]). Более того, решения уравнений *с потенциалом* не обладают свойством сохранения полной меры пространства, поэтому необходимо указать иной класс мер, в котором естественно их решать. Таким классом оказывается класс субвероятностных мер, т. е. таких борелевских неотрицательных мер σ на D, что $\sigma(D) \leqslant 1$.

В докладе рассматривается задача Коши для линейного уравнения вида

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x^i x^j} \left(a^{ij}(x,t)\mu_t\right) - \partial_{x^i} \left(b^i(x,t)\mu_t\right) + c(x,t)\mu_t, \quad \mu\Big|_{t=0} = \nu. \qquad (2)$$

и исследуются решения μ, заданные семейством неотрицательных мер μ_t, такие, что

$$\mu_t(D) \leqslant \nu(D) + \int_0^t \int c(x,s)\, d\mu_s\, ds. \qquad (3)$$

Оказывается, что это не техническое условие, а естественное обобщение вероятностного решения.

Теорема [**5**]. *Предположим, что матрица* $\left\{a^{ij}(x,t)\right\}$ *невырождена и принадлежит классу Липшица по* x, *снос* b *локально ограничен и* $c \leqslant 0$, $c \in L^{p/2}_{loc}(D \times (0,T))$ *для некоторого* $p > d+2$. *Пусть функция* V *такова, что* $V \in C^2(D)$ *и* $\lim_{x\to\partial D} V(x) = +\infty$, *для некоторого числа* $K > 0$ *и всех* $(x,t) \in D \times (0,T)$ *имеет место неравенство*

$$LV(x,t) \leq K + KV(x).$$

Тогда задача Коши (2) *имеет единственное решение* $\mu = (\mu_t)_{t\in(0,T)}$ *в классе мер с условием* (3), *причем для почти всех* t *выполняется равенство*

$$\mu_t(D) = \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\, d\mu_s\, ds.$$

В частности, при $c = 0$ *меры* μ_t *— вероятностные.*

Литература

[**1**] Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М., *Эллиптические и параболические уравнения для мер* // Успехи матем. наук. — 2009. — Т. 64, № 6. — С. 5–116. [**2**] Добрушин Р. Л., *Уравнения Власова* // Функц. анализ и его приложения. — 1979. — Т. 13, № 2. — С. 48–58. [**3**] Jordan R., Kinderlehrer D., Otto F., *The variational formulation of the Fokker–Planck equation* // SIAM J. Math. Anal. — 1998. — V. 29, № 1. — P. 1–17. [**4**] Gyongy I., Krylov N. V., *Existence of strong solutions for Ito's stochastic equations via approximations* // Probab. Theory Related Fields. — 1996. — V. 105. — P. 143–158. [**5**] Manita O. A., Shaposhnikov S. V., *On the well-posedness of the Cauchy problem*

for Fokker–Planck–Kolmogorov equations with potential terms on arbitrary domains // `arXiv:1307.3662`. — 2013.

Обратная задача теории малых колебаний

В. А. Марченко (ФТИНТ им. Б. И. Веркина)

Рассматриваются малые колебания системы, состоящей из конечного множества материальных точек (частиц), взаимодействующих друг с другом и с внешним полем. Предполагается, что наблюдать можно только колебания небольшой части этих частиц. Находятся необходимые и достаточные условия, при выполнении которых по этим наблюдениям можно вычислить потенциальную энергию системы и дается алгоритм ее вычисления.

Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций

М. М. Матякубов (Ургенчский государственный университет)

Рассмотрим следующее уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t) \cdot q\,|_{x=0} \cdot q_x, \quad x \in R, \quad t > 0 \tag{1}$$

с нагруженным членом при начальном условии

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x). \tag{2}$$

Требуется найти действительную π-периодическую по x

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad x \in R, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

функцию $q(x,t)$, удовлетворяющую условиям гладкости: $q \in C^{3,1}_{x,t}(t > 0) \bigcap C(t \geqslant 0)$. Здесь $\gamma(t)$ — заданная действительная непрерывная функция. Отметим, что уравнение КдФ в классе периодических функций исследовалась в работе [**1**] и др.

Теорема. *Пусть* $q(x,t)$ *решение задачи* (1)–(3). *Тогда собственные значения* λ_n, $n \geqslant 0$ *периодической и антипериодической задач для уравнения Штурма-Лиувилля с коэффициентом* $q(x+\tau,t)$ *не зависят от* *параметров τ и t, а собственные значения $\xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$ задачи Дирихле удовлетворяют аналогу системы Дубровина–Трубовица:*

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)[2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_n] \times \\ \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \\ \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{k\neq n}(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)(\xi_k - \xi_n)^{-2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Более того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \geqslant 1,$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \geqslant 1$ — спектральные параметры соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$.

Эта теорема вместе с формулами следов дает метод решения задачи (1)–(3).

Следствие 1. *Используя результаты работы* **[2]** *выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является аналитической функцией, то и решение $q(x,t)$ является аналитической функцией по x.*

Следствие 2. *Из результатов работы* **[3]** *следует, что если число π/n является периодом для начальной функции $q_0(x)$, то и решение $q(x,t)$ является π/n-периодической по переменной x. Здесь $n \geqslant 2$ натуральное число.*

Доклад основан на совместной работе с А. Б. Яхшимуратовым.

Литература

[1] Новиков С. П., *Периодическая задача Кортевега-де Фриза I* // Функц. анализ и прил. — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 54–66. **[2]** Trubowitz E., *The inverse problem for periodic potentials* // Comm. Pure. Appl. Math. — 1977. — V. 30. — P. 321–337. **[3]** Hochstadt H. *A Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations* // J. Math. Anal. and Appl. — 1984. — V. 102. — P. 599–605.

Операторы Штурма–Лиувилля

К. А. Мирзоев (МГУ имени М. В. Ломоносова)

Пусть $(a,b) \subset \mathcal{R}$ — конечный или бесконечный интервал, $p_0(x), q_0(x)$ и $p_1(x)$, $x \in (a,b)$ — вещественнозначные, измеримые функции, такие что p_0, p_0^{-1}, $p_1^2 p_0^{-1}$ и $q_0^2 p_0^{-1}$ локально интегрируемы по Лебегу, т. е. принадлежат пространству $\mathcal{L}^1_{loc}(a,b)$, а $w(x)$, $x \in (a,b)$, — п. в. положительная функция. В настоящей работе изложено введение в спектральную теорию операторов, порождённых в пространстве $\mathcal{L}^2_w(a,b)$ формальными выражениями вида

$$l[f] := w^{-1}\{-(p_0 f')' + i[(q_0 f)' + q_0 f'] + p_1' f\},$$

где всюду производные понимаются в смысле теории распределений. Конструкция, построенная в работе, позволяет корректно определить и включить минимальный оператор L_0, порождённый выражением $l[f]$ в пространстве $\mathcal{L}^2_w(a,b)$, в класс операторов, порождённых симметрическими (формально самосопряжёнными) квазидифференциальными выражениями второго порядка с локально интегрируемыми коэффициентами. В дальнейшем эти операторы будем называть операторами Штурма–Лиувилля. Таким образом, хорошо развитая спектральная теория квазидифференциальных операторов второго порядка применяется к изучению операторов Штурма–Лиувилля с коэффициентами–распределениями. Основной целью работы является построение теории Титчмарша–Вейля для указанных операторов. При этом вопрос о дефектных числах оператора L_0 — об условиях на коэффициенты p_0, q_0 и p_1, обеспечивающих реализацию случая предельной точки или предельного круга Вейля — является центральным. На примере теории гамильтониана с δ-взаимодействиями интенсивности h_k с центрами в точках x_k, т. е. в случае когда

$$l[f] = -f'' + \sum_j h_j \delta(x - x_j) f,$$

проверяется эффективность полученных результатов.

О разрешимости краевых задач для одного класса эллиптических операторно-дифференциальных уравнений

С. С. Мирзоев (Институт математики и механики НАН Азербайджана)

Пусть A — самосопряженный положительно определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Известно, что область определения оператора A^θ ($\theta \geqslant 0$) становится гильбертовым пространством H_θ относительно скалярного произведения $(x,y)_\theta = (A^\theta x, A^\theta y)$, $x, y \in \mathrm{Dom}(A^\theta)$. При $\theta = 0$ считаем, что $H_0 = H$. Далее, пусть $L(X,Y)$

обозначает множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства X в другое Y.

В данном докладе будут представлены результаты разрешимости уравнения

$$-u''(t) + \rho(t)A^2u(t) + A_1u'(t) = f(t), \qquad t \in R_+ = (0, +\infty),$$

при выполнении одного из краевых условий в нуле

$$u'(0) = Ku(0), \qquad K \in L(H_{3/2}, H_{1/2}),$$

или

$$u(0) = Tu'(0), \quad T \in L(H_{1/2}, H_{3/2}).$$

Здесь A_1 — линейный оператор, такой, что A_1A^{-1} ограничен в H, $f(t)$, $u(t)$ — H-значные вектор-функции, причем $f(t) \in L_2(R_+; H)$, $u(t) \in W_2^2(R_+; H)$, а $\rho(t) = \alpha$, если $t \in (0, 1)$, и $\rho(t) = \beta$, если $t \in (1, +\infty)$, где α, β — положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа (для определенности будем считать $\alpha \leqslant \beta$).

Отметим, что достаточно широко изучены вопросы разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений общего вида на полуоси и отрезке, а также спектральные проблемы, связанные с разрешимостью таких задач, когда коэффициенты в краевых условиях только комплексные числа. Среди этих исследований следует выделить работы М. Г. Гасымова, А. Г. Костюченко, М. Л. Горбачука, А. А. Шкаликова и их учеников. Но работ, посвященных этим вопросам для операторно-значных краевых условий, сравнительно мало. Из числа первых в этой области отметим работы Ф. С. Рофе-Бекетова, В. А. Ильина и А. Ф. Филиппова, М. Л. Горбачука и более позднюю работу М. Г. Гасымова и С. С. Мирзоева [**1**]. В [**1**] были изучены как вопросы разрешимости, так и некоторые спектральные проблемы, связанные с краевыми задачами для эллиптических операторно-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси. Основное отличие перечисленных в представленном докладе результатов разрешимости от работы [**1**] состоит в том, что функция $\rho(t)$ предполагается разрывной, а не постоянной. Это обстоятельство вносит существенные изменения в метод исследования. Для простоты изложения нами взята одна точка разрыва. Интерес к таким задачам обусловлен тем, что они применимы к широкому кругу задач для дифференциальных уравнений с частными производными и ряду нестандартных задач теории упругости многослойных тел.

Доклад основан на совместной работе с А. Р. Алиевым.

Литература

[**1**] Гасымов М. Г., Мирзоев С. С. *О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка* // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 4. — С. 651–661.

Оживлённая формула Валлиса

Ж. Э. Муангу (САФУ им. М. В. Ломоносова)

Формула Валлиса (1655 г.), представляющая число π в виде бесконечного произведения

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \ldots = \prod_{1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}, \qquad (1)$$

до недавнего времени давала замечательный предел

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n)!!^2}{n(2n-1)!!^2}.$$

Сегодня эта замечатльная формула почти забыта. Виной тому яляется изобилие экзотических и эктравогантных соотношеий, которым формула Валлиса уступает из-за крайне медленной сходимости произведения (1) (см., например, [**1**]). Однако она весьма полезна в различных теоретических исследованиях, и с этиой точки зрения интерес к ней до сих пор не ослабевает (см. [**2**]).

Пусть $\mu = \frac{2}{\pi} \ln \cot \frac{t}{2}$. Следующая теорема дает скорость сходимости в формуле Валлиса.

Теорема 1. *Справедливо следующее равенство*

$$\pi = \frac{(2n)!!^2}{n(2n-1)!!^2} - \int\limits_0^{\pi} g_n \, dt,$$

где $g_n = \dfrac{1}{\pi n \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu^2}{4k^2}\right)}$.

Далее в пространстве $H^1(0, \pi)$ определим оператор

$$\mathcal{A} = \tan \mathcal{D} \quad \mathcal{D} = \frac{d}{d\mu} = \frac{-\pi \sin t}{2} \frac{d}{dt}$$

(см. [**3**]).

Теорема 2. *Справедливо следующее соотношение*

$$\mu \cdot \mathcal{A} g_n = -2n g_n + \mu \cdot \tan t.$$

Как следствие получается легко генерируемая асимптотика любого порядка

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2}(1 + \frac{1/4}{n} + \frac{1/32}{n(n+1)} + \frac{3/128}{n(n+1)(n+2)} +$$

$$+ \frac{75/2048}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{735/8192}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots).$$

Литература

[**1**] Электронный ресурс `http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html` [**2**] Электронный ресурс `http://www.pi314.net` [**3**] Муангу Ж. Э. Р., *О специфике плоских экстремальных задач аэродинамики* // Тезисы докладов международной научной конференции «Спектральная теория операторов», посвящённой памяти А. Г. Костюченко, 13-15 июня 2011 г. — 2011. — С. 60.

Асимптотика решения задачи Коши для волнового уравнения со скоростью $c(x)$, вырождающейся на границе

С. Ю. Доброхотов (Институт проблем механики РАН; МФТИ)
В. Е. Назайкинский (Институт проблем механики РАН; МФТИ)
Б. Тироцци (Department of Physics, Sapienza Universitá di Roma, Italy; CINFAI, Italy)

Для волнового уравнения $u_{tt} - \nabla_x(c^2(x)\nabla_x u) = 0$ в конечной области $D \subset R^2$ с гладкой границей ∂D, на которой скорость $c(x)$ обращается в нуль как корень квадратный из расстояния от x до ∂D, в классе функций с конечной энергией $J^2(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2_{L^2(D)} + \|c\nabla u\|^2_{L^2(D)}\right)$ рассматривается задача Коши с начальными данными, локализованными в окрестности малого радиуса μ некоторой точки $x^0 \in D$. Используя идею о том, что границу ∂D можно рассматривать как особого рода каустику, мы строим модифицированный канонический оператор Маслова, который наряду с преобразованием Фурье использует в особых картах вблизи границы преобразование Ганкеля по нормали к границе и дает (после интегрирования по вспомогательному параметру) асимптотические решения при $\mu \to 0$ рассматриваемой задачи (а также задач для более общих гиперболических операторов, в которых на границе вырождаются только члены, содержащие производные по нормали) в шкале гильбертовых пространств с нормами, локально задаваемыми выражениями вида $\|u\|_s = \|(1-\mu^2\partial_1 x_1 \partial_1 - \mu^2\partial_2^2)^{s/2}u\|_{L^2(D)}$ (где $\partial_j = \partial/\partial x_j$ и подразумевается, что границу выпрямили так, что область в рассматриваемой окрестности задается неравенством $x_1 > 0$). Обсуждаются приложения этих асимптотических решений к задаче о накате на берег волн цунами. Результаты опубликованы в [**1**–**3**].

Исследования авторов поддержаны грантом РФФИ № 14-01-00521а и проектом RITMARE (CINFAI, Италия).

Литература

[**1**] Dobrokhotov S. Y., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B., *Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data* // Russ. J. Math. Phys. — 2013. — V. 20, № 4. — P. 389–401.
[**2**] Назайкинский В. Е., *Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению* // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 2. — С. 261–276.
[**3**] Nazaikinskii V. E., *Maslov's canonical operator for degenerate hyperbolic equations* // Russ. J. Math. Phys. — 2014. — V. 21, №. 2. — P. 289–290.

Об асимптотическом поведении решений сингулярных дифференциальных уравнений

Э. А. Назирова (Башкирский государственный университет, Уфа, Россия)

1. Известно [**1**, **2**, **3**], что для решений уравнения

$$y'' + q(x)y = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

где $q(x)$ — вещественная, положительная и такая, что $q(x) \to +\infty$, при $x \to \infty$ справедливы ВКБ асимптотические формулы:

$$y_{1,2} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{q}(x)} \exp\left\{ \pm i \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}dt \right\},$$

где $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $q'(x)$, $q''(x)$ при достаточно большом x_0 не меняют знак в интервале $[x_0, +\infty)$,

2) $q'(x) = o(q^{\alpha}(x))$, $0 < \alpha < 3/2$.

При этом в [**1**, **2**] использовался метод Левинсона замены уравнения системой уравнений первого порядка и приведением ее к L-диагональному виду, а в [**3**] использовалась замена Лиувилля. Первый метод более громоздкий, зато в отличии от второго может быть применен к уравнениям порядка выше второго.

2. Целью настоящего доклада является задача о существенном расширении класса потенциалов $q(x)$, к которым можно применить метод Левинсона.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$-y'' - q(x)y - (q_1(x) - q(x))y = 0. \qquad (1)$$

Здесь $q(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям 1)-2) раздела 1. Потребуем выполнения условия:

$$|P(x) \cdot q^{1/2}(x)| \leqslant r(x), \quad x > x_0, \qquad (*)$$

где $r(x) \in L(0, \infty)$, а

$$P(x) = \int\limits_x^{\infty} \frac{q_1(t) - q(t)}{\sqrt{q(t)}} dt.$$

Теорема. *Пусть для функции $q(x)$ выполнены условия 1), 2) из раздела 1, а также условие* $(*)$. *Тогда уравнение* (1) *имеет ФСР $\{y_1(x), y_2(x)\}$, такую, что при $x \to \infty$*

$$y_1(x) = q^{-1/4} e^{i\int q^{1/2}(x)dx}(1 + o(1)),$$
$$y_1'(x) = iq^{1/4} e^{i\int q^{1/2}(x)dx} q^{-1/4}(1 + o(1)),$$
$$y_2(x) = q^{-1/4} e^{-i\int q^{1/2}(x)dx}(1 + o(1)),$$
$$y_2'(x) = -iq^{1/4} e^{-i\int q^{1/2}(x)dx}(1 + o(1)).$$

Литература

[**1**] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. [**2**] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1983. [**3**] Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции.* М.: Наука, 1978. [**4**] Х. Х. Муртазин, Я. Т. Султанаев, *К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма–Лиувилля* // Математические заметки. — 1980. — Т. 28, № 4. — С. 545–553.

Свертки, порождаемые нелокальными операторами двукратного дифференцирования на отрезке

Д. Б. Нурахметов (Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллиан; Казахский национальный университет им. аль-Фараби)

Известно, какую роль играют понятия обобщенного решения дифференциальных уравнений. Оказывается, что нелокальные краевые операторы порождают свой индивидуальный класс пробных функций. В связи с чем возникают новые классы обобщенных функций, которые отражают специфику нелокальных краевых условий. В данной работе с нелокальным краевым оператором связываем свое преобразование Фурье и свертку.

В работе [**1**] исследованы биортогональные и базисные свойства следующей нелокальной задачи

$$\ell(y) \equiv -y''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

$$y(0) = y(1), \quad y'(1) = 0. \tag{2}$$

Заметим, что в этой же работе численно исследован спектр данной задачи с помощью разностных схем [**2**]. Для удобства оператор соответствующий задаче (1)–(2) обозначим через L.

В данной работе для оператора L в функциональном пространстве $\mathbb{L}_2(0,1)$ введем свертку по формуле:

$$\begin{aligned}(g*f)(x) = \int_x^1 f(t)\left(\int_x^t g(1-\theta+x)d\theta\right)dt +\\ + \frac{1}{2}\int_0^{1-x} f(t)\left(\int_{1-x}^t g(\theta+x)d\theta\right)dt +\\ + \frac{1}{2}\int_{1-x}^1 f(t)\left(\int_{1-x}^t g(2-x-\theta)d\theta\right)dt +\\ + \tfrac{1}{2}\int_0^x f(t)\left(\int_{x-1}^t g(x-\theta)d\theta\right)dt + \tfrac{1}{2}\int_x^1 f(t)\left(\int_t^{1+x} g(\theta-x)d\theta\right)dt,\end{aligned} \tag{3}$$

где $g(t) = \frac{\cos\sqrt{\lambda}(1-t)}{\Delta(\lambda)}, \Delta(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda} - 1$. Заметим, что метод работы идейно близок к методам работ [**3–6**].

Основной результат данной работы:

Теорема 1. *а) Введенная свертка при любых $f, g \in L_2(0,1)$ билинейна, коммутативна и ассоциативна;*

b) Резольвента оператора L имеет сверточное представление

$$(L-\lambda I)^{-1}f = g * f,$$

где $g(t) = \frac{\cos\sqrt{\lambda}(1-t)}{2\Delta(\lambda)}, \Delta(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda} - 1,$ I *— единичный оператор.*

c) Свертка функций g и f принадлежит области определения оператора L, если $g \in D(L)$, причем справедливо равенство

$$L(g * f) = Lg * f.$$

d) Свертка, порождаемая оператором L, без аннуляторов, то есть если при всех $g \in L_2(0,\,1)$ справедливо $g * f = 0$, то $f = 0$.

Для доказательство теоремы 1 существенную роль играет следующая лемма.

Лемма 1. *Резольвента оператора L имеет следующий вид*

$$\begin{aligned} y(x) = &\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}-1)} f(t)dt\,\cos\sqrt{\lambda}x + \\ &+ \int_0^1 \frac{\cos\sqrt{\lambda}(t-1)}{\cos\sqrt{\lambda}-1} f(t)dt\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \\ &- \int_0^1 \frac{\cos\sqrt{\lambda}t}{\cos\sqrt{\lambda}-1} f(t)dt\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Преобразование Фурье, порождаемое оператором L. Для каждой функции $f \in L_2(0,\,1)$ свяжем последовательность коэффициентов Фурье по системе корневых векторов оператора L

$$f \to \widehat{f} = \left\{ \int_0^1 f(t)\, v_k(t)\, dt,\ k \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

где $v_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ — система корневых векторов задачи, сопряженной к оператору L [**1**, **7**].

Лемма 2. *Для любых комплексных α и β справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} &\cos\alpha(1-x) * \cos\beta(1-x) = \\ &\quad = \frac{\cos(\beta(1-x))(\cos\alpha-1) - \cos(\alpha(1-x))(\cos\beta-1)}{\beta^2-\alpha^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Лемма 3. *Для* $\xi \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо*

$$\cos(2\pi\,\xi\,(1-x)) * \cos(2\pi\,\xi\,(1-x)) = 0.$$

Заметим так же, что для любого целого η

$$\cos(2\pi\,\eta(1-x)) * \cos(2\pi\xi\,(1-x)) = 0,$$

так как $\cos\alpha - 1 = 0$ при $\alpha = 2\pi\,\xi$.

Лемма 4. *Для* $\xi \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо тождество*

$$(1-x)\sin(2\pi\,\xi(1-x)) * \cos(2\pi\,\xi(1-x)) = -\frac{1}{8\,\pi\,\xi}\cos(2\pi\,\xi(1-x)). \quad (6)$$

Лемма 5. *Для* $\xi \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо тождество*

$$(1-x)\sin(2\pi\,\xi\,(1-x)) * (1-x)\sin(2\pi\,\xi\,(1-x)) =$$
$$= -\frac{1}{8\pi\,\xi}(1-x)\,\sin(2\pi\,\xi(1-x)) - \frac{1}{8\pi\,\xi}\cos(2\pi\,\xi(1-x)).$$

Следующее равенство проверяется непосредственными вычислениями

$$1 * 1 = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Аналогичными рассуждениями несложно показать, что для $\xi \neq \eta > 0$ имеет место тождества

$$\begin{gathered}
\cos(2\pi\,\xi\,(1-x)) * \cos(2\pi\,\eta\,(1-x)) = 0,\\
(1-x)\sin(2\pi\,\xi\,(1-x)) * \cos(2\pi\,\eta\,(1-x)) = 0,\\
(1-x)\sin(2\pi\,\xi\,(1-x)) * (1-x)\,\sin(2\pi\,\eta\,(1-x)) = 0,\\
\cos(2\pi\,\xi\,(1-x)) * \,1 = 0,\\
(1-x)\sin(2\pi\,\xi(1-x)) * 1 = 0.
\end{gathered} \quad (8)$$

Теперь в пространстве последовательностей $X = \prod_{k=0}^{\infty}\mathbb{C}^{m_k}$ введем внутреннюю свертку Коши. Пусть $\xi = \{\xi_0;\, \xi_{2k-1},\, \xi_{2k,\,k>0}\}$ и $\eta = \{\eta_0;\, \eta_{2k-1},\, \eta_{2k},\, k>0\}$ элементы $X = \prod_{k=0}^{\infty}\mathbb{C}^{m_k}$, тогда их сверткой назовем последовательнсть $\theta = \{\theta_0;\, \theta_{2k-1},\, \theta_{2k},\, k>0\}$, где

$$\theta_0 = \xi_0\,\eta_0,$$

$$\theta_{2k-1} = \xi_{2k-1}\eta_{2k} + \xi_{2k}\eta_{2k} + \xi_{2k}\eta_{2k-1},$$

$$\theta_{2k} = \xi_{2k}\eta_{2k}.$$

Полученную таким образом свертку будем обозначать через

$$\xi \underset{X}{*} \eta := \theta.$$

Введенные свертки $\underset{X}{*}$ и $*$ связаны между собой через преобразование Фурье.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых двух элементов* f, $g \in L_2(0, 1)$ *справедливо равенство*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \underset{X}{*} \widehat{g}.$$

Автор выражает благодарность профессору Б. Е. Кангужину за постановку задачи и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК, грант 0732/ГФ, 2012–2014гг.

Литература

[**1**] Н. И. Ионкин, Е. А. Валиева, *О собственных значениях и собственных функциях одной неклассической краевой задачи* // Матем. моделирование. — 1996. — Т. 8, № 1. — С. 53-63. [**2**] А. А. Самарский, *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989. [**3**] Б. Е. Кангужин, С. Н. Гани, *Свертки, порождаемые дифференциальными операторами на отрезке* // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. — 2004. — № 1. — С. 29–33. [**4**] Б. Е. Кангужин, Д. Б. Нурахметов, *Нелокальные внутренне краевые задачи дифференциальных операторов и некоторые конструкции, связанные с ними* // Математический журнал. — 2012. — Т. 12, № 3 (45). — С. 92–100. [**5**] B. Kanguzhin, N. Tokmagambetov, *The Fourier transform and convolutions generated by a differential operator with boundary condition on a segment* // Trends in Mathematics. — 2013. — P. 235–251. [**6**] B. Kanguzhin, N. Tokmagambetov and K. Tulenov, *Pseudo-differential operators generated by a non-local boundary value problem* // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — `http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2014.896351`. [**7**] Н. И. Ионкин, *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 2. — С. 294–304.

Спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля с δ-взаимодействиями

М. Нурсултанов (Назарбаев университет)

Пусть $I=[0,+\infty)$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность действительных чисел, а $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}\subset I$ возрастающая последовательность такая, что $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

Рассмотрим оператор

$$L:=-\frac{d^2}{dx^2} \tag{1}$$

с областью определения

$$D(L)=\Big\{y\in W_2^1(I): y'(0)=0,\ y\in W_2^2(I\backslash\{t_k\}),\quad \sum_{i=1}^{\infty}c_i|y(t_i)|^2<\infty,$$
$$y'(t_k+0)-y'(t_k-0)=c_k y(t_k)\Big\}. \tag{2}$$

Данный оператор ассоциируется с дифференциальным выражением вида

$$-\frac{d^2}{dx^2}+\sum_{i=1}^{\infty}c_i\delta(x-t_i). \tag{3}$$

Спектральные свойства оператора L изучались в работах [**1**–**3**].

В работе [**3**] получен критерий дискретности молчановского типа, то есть для того что бы спектр оператора (1), (2) был дискретным необходимо и достаточно

$$\sum_{t_k\in[y,y+d]}c_k\to\infty,\ \text{при } y\to+\infty.$$

В данной работе получены двусторонние оценки функции распределения собственных чисел и как следствие, критерии дискретности спектра в терминах функции Отелбаева, а так же доказан критерий принадлежности оператора L пространству $\mathfrak{S}_p$.

Методы доказательства основных результатов связаны с работами М. Отелбаева [**4**, **5**].

Пусть $T=\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $C=\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $c_k>0$, для потенциала

$$q(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\delta(x-t_k)$$

определим функцию

$$q^*(x) = q^*_{T,C}(x) := \inf_{d>0} \left\{ d^{-2} : \sum_{t_k \in \Delta_d(x)} c_k \leqslant d^{-1} \right\},$$

где $\Delta_d(x) = \left[x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}\right]$, $x \in I$.

Лемма 1. *Функция $q^*(x)$ положительна и непрерывна на I.*

Теорема 1. *Пусть $N(\lambda)$ функция распределения собственных чисел оператора L. Тогда имеет место неравенство*

$$N(\lambda) \leqslant \pi\sqrt{\lambda}\,\mathrm{mes}\left\{y : q^*(y) \leqslant \pi^2\lambda\right\}.$$

Из леммы 1 следует, что функция q^* измерима.

Теорема 2. *Пусть $N(\lambda)$ функция распределения оператора L. Тогда имеет место оценка*

$$N(\lambda) \geqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\pi^2+1}}\,\mathrm{mes}\left\{x \in I : q^*(x) \leqslant \frac{\lambda}{16(\pi^2+1)}\right\}.$$

Теорема 3. *Спектр оператора L дискретен тогда и только тогда, когда*

$$q^*(x) \to \infty \text{ при } x \to +\infty.$$

Теорема 4. *Пусть $p > \frac{1}{2}$ и $q^*(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$. Тогда, для того, чтобы $L^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, необходимо и достаточно*

$$\int_0^\infty \left(q^*(x)\right)^{\frac{1}{2}-p} dx < \infty.$$

Литература

[**1**] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.
[**2**] А. С. Костенко, М. М. Маламуд, *Об одномерном операторе Шредингера с δ-взаимодействиями* // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44, № 2. — С. 87–91.
[**3**] S. Albeverio, A. Kostenko, M. Malamud, *Spectral theory of semibounded Sturm–Liouville operators with local point iterections on descrete set* // J. Math. Phys. — 2010. —

V. 51. [**4**] М. О. Отелбаев, *Двусторонние оценки распределения собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля* // Матем. заметки. — 1976. — Т. 20, № 6. — С. 856. [**5**] М. О. Отелбаев, *Оценки спектра оператора Штурма–Лиувилля.* Алма-Ата: Гылым, 1990.

Весовые неравенства и осцилляционные свойства одного квазилинейного уравнения типа Штурма-Лиувилля

Р. Ойнаров (Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева)
Х. С. Рамазанова (Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева)

На множестве гладких, финитных функций на полуоси устанавливаются достаточные, необходимые условия выполнения двухвесового неравенства

$$\|uf\|_q \le C\|\rho f'\|_p \tag{1}$$

и трехвесового неравенства

$$\|uf\|_q \le C\left(\|\rho f'\|_p^p + \|vf\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\|\cdot\|_p$ — обычная норма пространства L_p, а u, v и ρ — весовые функции.

Выделяется класс весовых функций, включающий в себе неотрицательные периодические функции. В случае, когда веса ρ и u из этого класса, найдено точное значение наилучшей постоянной в (1).

Полученные результаты применяются для установления осцилляционных свойств уравнения вида

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + w(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0, \tag{2}$$

где $1 < p < \infty$, $\rho > 0$, w — непрерывные функции. При $p = 2$ уравнение (2) переходит в уравнение Штурма–Лиувилля.

Операторные оценки усреднения для уравнений с квазипериодическими коэффициентами

С. Е. Пастухова (Московский институт радиотехники, электроники и автоматики)

Изучаются действующие во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, дифференциальные эллиптические операторы второго порядка дивергентного и недивергентного типов. Коэффициенты операторов — быстро осциллирующие квазипериодические функции, ε — малый параметр, определяющий быструю осцилляцию. Для резольвенты операторов строятся нулевое и первое приближения, соответственно в операторных нормах $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)}$ и $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}$, с погрешностью порядка ε. Приближения связаны с усредненными операторами, аналогичными исходным по структуре, но с постоянными коэффициентами. Для отыскания этих коэффициентов, как обычно в теории усреднения, служит "задача на ячейке", разрешимость которой в квазипериодической постановке представляет трудности в связи с её вырожденностью. Здесь могут появиться малые знаменатели. Отсюда возникает "частотное условие" — требование на частотные векторы, участвующие в формировании квазипериодических функций. Важно отметить, что частотное условие выполнено для операторов "общего положения". Это условие позволяет контролировать вырождение задачи на ячейке. Допускается лишь вырождение степенного характера, в результате чего задача на ячейке оказывается "гипоэллиптической" и корректно поставлена в шкале соболевских пространств.

Для недивергентных уравнений любые воросы разрешимости (во всем пространстве, в ограниченной области, на ячейке периодичности) имеют положительный ответ при дополнительном условии на матрицу коэффициентов, помимо естественного условия равномерной эллиптичности. Это дополнительное требование называют условием "конуса", или условие Кордеса. Известна техника приведения недивергентных уравнений с симметрической матрицей коэффициентов к дивергентным уравнениям с несимметрической матрицей коэффициентов. Благодаря этому подходу, операторные приближения строятся более или менее одинаково для дивергентных и недивергентных уравнений. Важную роль в недивергентной теории играет так называемое "неравенство острого угла" для квазипериодических функций, которое выводится из аналогичного неравенства для финитных функций в $\mathbb{R}^d$, установленного в [**1**].

Эти результаты получены совместно с В. В. Жиковым. Они, с одной стороны, дополняют исследование задач усреднения с почтипериодическими коэффициентами, проведённое ранее в [**2**–**6**], а с другой стороны, продолжают начатую в [**7**] линию работ В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой, в которых модифицированным методом первого приближения доказаны операторные оценки усредния для уравнений самых различных типов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00192-а), Гранта Президента РФ НШ-3685.2014.1, а также Гранта поддержки и развития Российского научного фонда (проект 14-11-00398).

Литература

[**1**] В. В. Жиков, М. М. Сиражудинов, *О G-компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов второго порядка* // Изв. РАН, серия матем. — 1981. — Т. 45, № 4. — С. 69–98. [**2**] С. М. Козлов, *Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстроосциллирующими коэффициентами* // Матем. сб. — 1978. — Т. 107 (149), № 2 (10). — С. 199–217. [**3**] В. В. Жиков, М. М. Сиражудинов, *Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши* // Матем. сб. — 1981. — Т. 116 (158), № 2 (10). — С. 166–186. [**4**] В. В. Жиков, *Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами* // Тр. ММО. — 1983. — Т. 46. — С. 69–98. [**5**] С. М. Козлов, *Приводимость квазипериодических дифференциальных операторов и усреднение* // Тр. ММО. — 1983. — Т. 46. — С. 99–123. [**6**] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов.* М.: Наука, 1993. [**7**] В. В. Жиков, *Об операторных оценках в теории усреднения* // ДАН. — 2005. — Т. 403, № 3. — С. 305–309.

Переходная функция обратной задачи и функция Вейля–Титчмарша оператора Штурма–Лиувилля

В. Е. Подольский (МГУ, мех-мат ф-т)

В докладе будут рассказаны методы исследования прямой спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с использованием результатов обратной задачи. Будут предложены формулы прямой связи между переходной функцией обратной задачи и спектральной функцией, и с их помощью проведено исследование асимптотического поведения функции Вейля–Титчмарша. Все обсуждаемые вопросы прямо связаны с исследованиями Б. М. Левитана по обратной задаче, асимптотике спектральной функции и асимптотике функции Вейля–Титчмарша.

Решение задачи теплопроводности с неусиленно регулярными краевыми условиями

М. А. Садыбеков (Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан)

В докладе в области $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассматривается задача о нахождении решения уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{2}$$

и краевым условиям вида

$$\begin{cases} ca_1u_x(0,t)+b_1u_x(1,t)+a_0u(0,t)+b_0u(1,t)=0,\\ c_1u_x(0,t)+d_1u_x(1,t)+c_0u(0,t)+d_0u(1,t)=0. \end{cases} \tag{3}$$

где a_k, b_k, c_k, d_k, $k=0,1$ — комплексные числа.

Задачи параболического типа с двухточечными краевыми условиями общего вида (3) изучались ранее в работе Н. И. Ионкина и Е. И. Моисеева [**1**].

Применение метода Фурье для решения задачи (1)–(3) приводит к следующей задаче: при каких условиях произвольная начальная функция $\varphi(x)$ разлагается в сходящийся ряд по собственным, либо по собственным и присоединенным функциям оператора, заданного дифференциальным выражением

$$l(y)=-y''(x)+q(x)y(x),\quad 0<x<1 \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} a_1y'(0)+b_1y'(1)+a_0y(0)+b_0y(1)=0,\\ c_1y'(0)+d_1y'(1)+c_0y(0)+d_0y(1)=0. \end{cases} \tag{5}$$

В случае, когда краевые условия (5) являются усиленно регулярными из [**2**, **3**] следует базисность Рисса в L_2 систем собственных и присоединенных функций задачи. Основываясь на этом факте, в [**1**] в предположении усиленной регулярности условий (5) модифицированным методом разделения переменных построено решение задачи (1)–(3), доказана его единственность и устойчивость по начальным данным в различных нормах.

В случае же, когда краевые условия являются регулярными, но не усиленно регулярными, вопрос о базисности систем собственных и присоединенных функций до конца окончательно еще не решен. Наиболее актуальные результаты здесь получены в [**4**, **5**].

Корректность задачи (1)–(3) в частном случае $q(x)\equiv 0$ при не усиленно регулярных краевых условиях Самарского–Ионкина, для которых система собственных и присоединенных функций соответствующей задачи (4)–(5) образует базис Рисса, установлена в [**6**]. Эта же задача с возмущенным краевым условием решена в [**7**] методом разделения переменных в одном частном случае, когда краевые условия (5) являются не усиленно регулярными и система собственных и присоединенных функций задачи (4)–(5) не образует базиса.

Таким образом, для задачи (1)–(3) в случае, когда краевые условия (5) являются регулярными, но не усиленно регулярными (даже в простейшем случае $q(x) \equiv 0$) до сегодняшнего дня не было единого способа решения и доказательства корректности.

В настоящем докладе предлагается новый метод решения задачи (1)–(3) для случая, когда краевые условия (5) являются регулярными, но не усиленно регулярными, не зависящий от того образует ли базис система собственных и присоединенных функций соответствующей задачи (4)–(5). Предлагаемый метод решения задачи может быть применим для построения как классического, так и для различных типов обобщенных решений. Поэтому на конкретных условиях гладкости входящих в постановку задачи функций мы останавливаться не будем.

Для применения этого метода существенным является четность функции потенциала: $q(x) = q(1 - x)$.

Теорема. *Решение задачи* (1)–(3) *в случае регулярных, но не усиленно регулярных условий, при* $q(x) = q(1 - x)$ *всегда может быть эквивалентно сведено к последовательному решению двух краевых задач с усиленно регулярными краевыми условиями типа Штурма.*

Литература

[**1**] Ионкин Н. И., Моисеев Е. И., *О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями* // Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15, № 7. — С. 1284–1295. [**2**] Михайлов В. П., *О базисах Рисса в* $L_2(0,1)$ // ДАН. — 1962. — Т. 144, № 5. — С. 981–984. [**3**] Кесельман Г. М., *О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов* // Изв. вузов СССР. Математика. — 1964. — № 2. — С. 82–93. [**4**] Макин А. С., *О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма–Лиувилля* // ДАН. — 2006. — Т. 406, № 1. — С. 21–24. [**5**] Lang P., Locker J., *Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by -*D^2 // J. Math. Anal. And Appl. — 1990. — V. 146, № 1. — P. 148–191. [**6**] Ионкин Н. И., *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 2. — С. 294–304. [**7**] Мокин А. Ю., *Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности* // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 1. — С. 123–137.

Об усреднении генераторов полугрупп и его приложениям к регуляризации задач с особенностями

В. Ж. Сакбаев (МФТИ, РУДН)

Случайные полугруппы определяются как случайные величины, значениями которых являются однопараметрические полугруппы преобразований некоторого банахова пространства. Математическое ожидание такой случайной величины, определяемое интегралом Петтиса, является операторнозначной функцией, которая может не обладать полугрупповым свойством (см. [**1**]). На множестве операторнозначных функций вводится отношение эквивалентности (см. [**2**]) и устанавливается эквивалентность математического ожидания случайной полугруппы некоторой полугруппе, генератор которой и естественно определить как математическое ожидание случайного генератора. Будет показано, что введенная операция усреднения генераторов полугрупп является обобщением процедуры усреднения линейных ограниченных операторов и аналогом процедуры сложения операторов в смысле квадратичных форм с той разницей, что вместо квадратичной формы самого неограниченного оператора исследуются квадратичные формы порожденной им полугруппы.

Установлено, что введенная процедура усреднения может изменить спектральные свойства усредняемых операторов — среднее значение семейства самосопряженных операторов может быть оператором симметрическим.

Рассмотрены приложения процедуры усреднения к задачам Коши с вырождающимися операторами, операторами переменного типа и нелинейными операторами, общей особенностью которых является разрушение решения за конечное время. Будет определена процедура продолжения динамического преобразования пространства начальных данных задачи Коши, допускающей явление взрыва, посредством случайной полугруппы (см. [**3**]).

Литература

[**1**] В. Ж. Сакбаев, *Об усреднении квантовых динамических полугрупп* // ТМФ. — 2010. — Т. 164. — С. 455–463. [**2**] O. G. Smolyanov, H. Weizsacker, O. Wittih, *Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds* // Potential Anal. — 2007. — V. 26. — P. 1–29. [**3**] Д. О. Огун, Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, *О преобразовании пространства начальных данных для задачи Коши с особенностями решения типа взрыва* // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2012. — № 87.

Аналог теоремы Орлова для систем квазидифференциальных уравнений

Т. А. Сафонова (Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова)

Пусть $P(x)$ — невырожденная матриц-функция порядка n ($n \in \mathcal{N}$), определённая на множестве $I := [1; +\infty)$; функции $p_{ij}(x)$ и $q_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) — элементы эрмитовых матриц-функций $P^{-1}(x)$ и $Q(x)$ соответственно, а функции $r_{ij}(x)$ — элементы комплекснозначной матриц-функции $R(x)$ того же порядка, определены и измеримы на множестве I и $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} \in L^1_{loc}(I)$. Перечисленные условия позволяют определить квазипроизводные заданной локально абсолютно непрерывной вектор-функции $y = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^t$ (t — символ транспонирования) посредством матриц P, Q и R, полагая

$$y^{[0]} := y, \qquad y^{[1]} := P(y' - Ry), \quad y^{[2]} := (y^{[1]})' + R^* y^{[1]} - Qy,$$

и квазидифференциальное выражение, полагая

$$\begin{aligned} l[y](x) &:= -(y^{[1]})' - R^* y^{[1]} + Qy = \\ &= -(P(y' - Ry))' - R^* P(y' - Ry) + Qy, \qquad x \in I, \end{aligned}$$

где R^* — сопряжённая матрица к матрице R, а $y^{[1]} \in AC_{loc}(I)$.

Пусть далее матрицы $P^{-1}(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ представимы в виде:

$$P^{-1}(x) = x^{-\nu-2}(P_0 + P_1(x)), \quad Q(x) = x^{\nu}(Q_0 + Q_1(x)),$$
$$R(x) = x^{-1}(R_0 + R_1(x)),$$

где $\nu \geqslant 0$, P_0, Q_0 и R_0 — числовые матрицы, а $P_1(x)$, $Q_1(x)$ и $R_1(x)$ удовлетворяют условиям

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^r(x)}{x} |P_1(x)| dx < +\infty, \qquad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^r(x)}{x} |Q_1(x)| dx < +\infty,$$
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^r(x)}{x} |R_1(x)| dx < +\infty,$$

а $r+1$ — максимальная кратность характеристического корня числовой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} R_0 + 1/2 I_n & P_0 \\ Q_0 & -R_0^* - (\nu + 1/2) I_n \end{pmatrix}.$$

Данная работа посвящена установлению аналога теоремы С. А. Орлова (см. [**1**]) для уравнения

$$l[y](x) = \lambda y, \tag{1}$$

где $\lambda \in C$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда максимальное число линейно независимых решений уравнения* (1)*, принадлежащих* $\mathcal{L}_n^2(I)$*, равно числу корней многочлена*

$$\mathcal{F}(z, \nu) := \det(A - zI),$$

лежащих в области $\operatorname{Re} z < 0$*, и не зависит от* λ*. При этом спектр любого самосопряжённого расширения оператора* L_0 *является дискретным.*

Доклад основан на совместной работе с И. Н. Бройтигам. Докладчик выражает глубокую благодарность профессору К. А. Мирзоеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

Первый автор поддержан Министерством образования и науки РФ и Германской службой академических обменов (DAAD) (программа «Михаил Ломоносов», ref: 325-A/13/74976), второй автор поддержан РФФИ, гранты №№ 14-01-00349-а и 14-01-31136-мол-а.

Литература

[**1**] С. А. Орлов, *Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов* // Доклады АН СССР. — 1953. — V. 92, № 3. — 1953. — P. 483–486.

Разрешимость в L_p-пространствах (по времени) параболических уравнений с оператором, удовлетворяющим гипотезе Като

А. М. Селицкий (ВЦ им. А. А. Дородницына РАН, РУДН)

Пусть $V \subset H \subset V'$ — тройка сепарабельных комплексных гильбертовых пространств с плотными и непрерывными вложениями, при этом будем предполагать, что пространства V и V' дуальны относительно скалярного произведения в H, на H определена ограниченная полуторалинейная форма $a[u, v]$ с областью определения V, удовлетворяющая условию сильной коэрцитивности $\operatorname{Re} a[u, u] \geq C\|u\|_V^2$ с некоторой постоянной $C > 0$. Эта форма определяет линейный ограниченный оператор

$A\colon V \to V'$, та же форма определяет неограниченный линейный оператор $\mathcal{A}\colon H \supset D(\mathcal{A}) \to H$, где область определения $D(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ состоит из таких $u \in V$, что найдется некоторый элемент $\mathcal{A}u \in H$, такой что $(\mathcal{A}u, v)_H = (Au, v)_H$ при всех $v \in V$. Пусть $v \in [V', V]_{1-\theta}$ при $0 \le \theta \le 1/2$, тогда равенство $(Au, v)_H = (A_\theta u, v)_H$ определяет линейный ограниченный оператор $A_\theta\colon D(A_\theta) \to [V', V]'_{1-\theta} = [V', V]_\theta$. При этом $A_\theta u = Au$ при $u \in D(A_\theta)$ в силу плотности $[V', V]_{1-\theta}$ в H.

Пусть $f \in L_p(0,T;[V',V]_\theta)$, $\varphi \in [V',V]_\theta$ $(1 < p < \infty,\ 0 \le \theta \le 1/2)$, $0 < T < \infty$. Рассмотрим следующую задачу:

$$u' + A_\theta u = f, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi. \tag{2}$$

Функцию $u \in W_p(A_\theta) = \{v \in L_p(0,T;D(A_\theta)) : v_t \in L_p(0,T;[V',V]_\theta)\}$ будем называть решением задачи (1)-(2), если при почти всех $t \in (0,T)$ она удовлетворяет равенству (1) и начальному условию (2).

Условие 1. Оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет гипотезе Като: $D(\mathcal{A}^{1/2}) = V$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1,* $1 < p \le 1/\theta$ *при* $\theta \in (0, 1/2]$ *и* $1 < p < \infty$ *при* $\theta = 0$, $f \in L_p(0,T;[V',V]_\theta)$. *Тогда задача* (1)-(2) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $\varphi \in (V',V)_{1-\frac{1}{p}+\theta,p}$.

Работа была частично поддержана грантами РФФИ 13-01-00923 и 14-01-00265, а также грантом Президента государственной поддержки ведущих научных школ НШ–4479.2014.1.

О приближенном коммутировании убывающего потенциала и функции от эллиптического оператора

В. А. Слоущ (СПбГУ)

Мы обсудим оценки сингулярных чисел операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ вида $\varphi(H)W(x) - W(x)\varphi(H)$ для подходящих функций $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $W(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, и самосопряженного оператора $H = -\operatorname{div} a(x)\operatorname{grad} + b(x)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Предполагается, что вещественная симметричная $d \times d$-матрица-функция $a(x)$ ограничена и равномерно эллиптична, вещественный потенциал $b(x)$ ограничен; ограниченная функция W имеет степенную асимптотику на бесконечности; φ — финитная непрерывная функция на оси. Также нас будет интересовать связь асимптотик сингулярных чисел операторов $\varphi(H)W$ и $\varphi^n(H)W^n$. Такого рода результаты представляют интерес в спектральной теории дифференциальных операторов.

Для произвольного компактного оператора $\mathbb{T}$ через $s_m(\mathbb{T})$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим сингулярные числа оператора $\mathbb{T}$. Если функция $W \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$

имеет степенную асимптотику $W(x) \sim \omega(x/|x|)|x|^{-d/p}$, $|x| \to +\infty$, то сингулярные числа оператора $\varphi(H)W$ удовлетворяют оценке $s_m(\varphi(H)W) \leqslant Cm^{-1/p}$, $m \in \mathbb{N}$. Наш основной результат следующий:

> *сингулярные числа оператора $\varphi(H)W - W\varphi(H)$ удовлетворяют соотношению*
>
> $$s_m(\varphi(H)W - W\varphi(H)) = o(m^{-1/p}), \quad m \to +\infty.$$

Последняя оценка позволяет связать асимптотики сингулярных чисел операторов $\varphi(H)W$ и $\varphi^n(H)W^n$. Именно, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\liminf_{m\to+\infty} s_m(\varphi(H)W)m^{1/p} = \left(\liminf_{m\to+\infty} s_m(\varphi^n(H)W^n)m^{n/p}\right)^{1/n};$$

$$\limsup_{m\to+\infty} s_m(\varphi(H)W)m^{1/p} = \left(\limsup_{m\to+\infty} s_m(\varphi^n(H)W^n)m^{n/p}\right)^{1/n}.$$

Наши рассуждения основываются на оценках сингулярных чисел операторов $\varphi(H)W$ и на некотором свойстве «псевдолокальности» оператора $\varphi(H)$. Кроме того, мы используем некоторый вариант оценки Цвикеля для операторов с «неотрицательным» ядром. Полученные результаты будут полезны при исследовании дискретного спектра эллиптического дифференциального оператора, возмущенного убывающим потенциалом.

Представление регуляризованных следов дифференциальных операторов функциональными интегралами

О. Г. Смолянов (МГУ им. М. В. Ломоносва)

Рассматриваются представления регуляризованных следов обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка с помощью лагранжевых и гамильтоновых функциональных интегралов и соответствующих формул Фейнмана. Использование таких представлений позволяет также получить формулы, не содержащие функциональных интегралов.

Формулой Фейнмана называется представление полугруппы (или группы) Шредингера $e^{t\widehat{H}}$ ($e^{it\widehat{H}}$) или представление какого-либо объекта, связанного с генератором $\widehat{H}$ этой полугруппы с помощью предела последовательности интегралов по декартовым степеням какого-нибудь пространства E. Если пространство E совпадает с конфигурационным пространством гамильтоновой системы, квантованием которой получается генератор полугруппы $\widehat{H}$ (это означает, что $\widehat{H}$ — это псевдодифференциальный оператор, символом которого является классическая функция Гамильтона H, чем и объясняется введенное обозначение), то формула Фейнмана называется лагранжевой; если E совпадает с фазовым пространством той же гамильтоновой системы, то формула Фейнмана называется гамильтоновой [**3**]. Возможно использование в качестве E и других пространств, в частности, того же фазового пространства, наделенного подходящей комплексной структурой (тогда можно говорить о формуле Фейнмана в голоморфном представлении), а также некоторых суперпространств (если конфигурационное пространство является римановым многообразием).

Формулы Фейнмана являются аппроксимациями некоторых интегралов по бесконечномерным пространствам функций, принимающих значения в пространстве E; получаемые таким образом представления полугруппы $e^{t\widehat{H}}$ или связанных с ней объектов называются соответственно лагранжевыми или гамильтоновыми формулами Фейнмана–Каца или формулами Фейнмана–Каца в голоморфном представлении.

Если $A(\cdot)$ — операторнозначаная функция параметра α из $[0,1]$, причем $A(0) = \widehat{H}$, а оператор $A(1) - A(0)$ является ядерным, то его след называется A-регуляризованным следом оператора $\widehat{H}$. Рассматривается случай, когда $\widehat{H}$ — обыкновенный дифференциальный оператор четного порядка, и при подходящем выборе функции A получено представление его A-регуляризованного следа с помощью лагранжевых и гамильтоновых формул Фейнмана и Фейнмана–Каца. При этом использовались результаты работ [**1**, **2**].

Литература

[**1**] Садовничий В. А., Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // ДАН. — 2014. — Т. 456, № 1. — С. 23–26. [**2**] Садовничий В. А., Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // ДАН. — 2012. — Т. 446, № 3. — С. 265–268. [**3**] Дж. Гоф (J. Gough), Т. Ратью (T. S. Ratiu), O. G. Smolyanov, *Фейнмановские, вигнеровские и гамильтоновы структуры, описывающие динамику открытых квантовых систем* // ДАН. — 2014. — Т. 454, № 4. — С. 379–383.

Об оценках норм диагоналей и структуре оператора, обратного к оператору, порожденному специальным интегральным оператором

В. Е. Струков (Воронежский государственный университет)

Пусть $l^1(\mathbb{Z})$ — банахово пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)| < \infty$.

Символом $C(\mathbb{T})$ будем обозначать банахово пространство комплексных непрерывных функций, определенных на окружности $\mathbb{T} = \{\theta \in \mathbb{C} : |\theta| = 1\}$.

Будем говорить, что функция $f \in C(\mathbb{T})$ обладает *абсолютно сходящимся рядом Фурье*, если она может быть представлена в виде ряда $f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\theta^k$, $\theta \in \mathbb{T}$, где $a \in l^1(\mathbb{Z})$. Совокупность всех таких функций обозначим через $AC(\mathbb{T})$. Заметим, что $AC(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй с поточечным умножением и нормой

$$\|f\|_{AC} = \|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)|.$$

В терминах введенных обозначений теорема Винера формулируется следующим образом.

Теорема 1. (Н. Винер) *Если функция $f \in AC(\mathbb{T})$ и $f(\theta) \neq 0$ для всех $\theta \in \mathbb{T}$, то $1/f \in AC(\mathbb{T})$, т. е. $1/f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b(k)\theta^k$, где $b \in l^1(\mathbb{Z})$.*

В данной работе будет также использоваться терминология Н. Бурбаки.

Определение 1. Подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ называется *наполненной* в алгебре $\mathcal{B}$, если каждый элемент $a \in \mathcal{A}$, обратимый в алгебре $\mathcal{B}$, обратим также в подалгебре $\mathcal{A}$.

Сформулируем теорему Винера в терминах наполненности:

Теорема 1. *Алгебра $AC(\mathbb{T})$ наполнена в алгебре $C(\mathbb{T})$.*

Пусть $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов на бесконечномерном комплексном банаховом пространстве X, $\operatorname{Inv} X$ — множество (непрерывно) обратимых операторов из пространства $\operatorname{End} X$.

Пусть $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, C)$ — банахова алгебра измеримых 2π-периодических, интегрируемых на отрезке длины 2π функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_1^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt$$

и сверткой в качестве операции умножения

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)\, ds$$

для всех $f, g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, C)$.

В данном докладе рассматриваются операторы вида

$$A = aI + K, \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \tag{1}$$

где K — интегральный оператор, действующий в банаховом пространстве $X = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ непрерывных 2π-периодических функций с нормой

$$\|x\|_{C_{2\pi}} = \max_{t\in[0,2\pi]} |x(t)|.$$

Оператор K имеет вид

$$(Kx)(\tau) = \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau, u)x(u)du, \tag{2}$$

причем его ядро $\mathcal{K} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{K}(\tau + 2\pi, u + 2\pi) = \mathcal{K}(\tau, u)$ для всех $\tau, u \in \mathbb{R}$.

2) $\kappa(\tau) \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, C)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, где $(\kappa(\tau))(u) = \mathcal{K}(\tau, u)$, $u \in \mathbb{R}$.

3) $\kappa \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, C)$ (функция κ непрерывна по норме пространства $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, C)$).

Лемма 1. *Рассматриваемый интегральный оператор* $K \in \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *компактен.*

В качестве группы изометрий в пространстве $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ рассмотрим группу сдвигов $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, определенную формулой $(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)$.

Рассмотрим функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, определяемую формулой $\Phi_A(t) = S(t)AS(-t)$. Ясно, что она имеет вид

$$(\Phi_A(t)x)(\tau) = \alpha I + \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(\tau + t, v + t)x(v)dv, \quad x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Функции Φ_A поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$\Phi_A(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} S(t)AS(-t)e^{-ikt}dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ будем называть рядом Фурье оператора A, а операторы A_k, $k\in\mathbb{Z}$, — коэффициентами Фурье этого оператора (относительно представления T). Определим норму $d_A(k)$ диагонали оператора A, положив $d_A(k)=\|A_k\|,\ k\in\mathbb{Z}$.

Пусть оператор вида (1) удовлетворяет одному из пунктов следующего предположения 1.

Предположение 1. Для оператора $A\in\operatorname{End}_c X$ справедливо одно из соотношений

1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)<\infty$.

2) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)\alpha(k)<\infty$, где функция $\alpha:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим свойствам:

a) $\alpha(k)\geq 1\ \forall k\in\mathbb{Z}$,

b) $\alpha(k_1+k_2)\leq\alpha(k_1)\alpha(k_2)\ \forall k_1,k_2\in\mathbb{Z}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\alpha(nk)}{n}=0\quad\forall k\in\mathbb{Z}$.

3) $\lim\limits_{k\to\infty} d_A(k)|k|^\gamma=0,\ k\in\mathbb{Z},\ \gamma>1$.

Совокупности операторов, удовлетворяющих пунктам 1, 2 или 3 предположения 1, обозначим соответственно $Gio_1C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $Gio_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $Gio_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Несложно показать, что данные совокупности являются банаховыми подалгебрами алгебры $\operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Обозначим символом p в $Gio_pC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ один из символов $1,\alpha,\gamma$.

Основным результатом работы является полученная на основе лемм 1 и 2 статьи [**1**] следующая

Теорема 2. *Пусть оператор $A\in Gio_pC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (p — один из символов $1,\alpha,\gamma$) имеет вид (1) и является непрерывно обратимым, тогда обратный оператор имеет вид*

$$A^{-1}=\frac{1}{a}I+\widetilde{K},$$

где оператор $\widetilde{K}$ является компактным интегральным оператором вида

$$(\widetilde{K}x)(t)=\int\limits_0^{2\pi}\widetilde{\mathcal{K}}(t,s)x(s)\,ds,$$

с ядром $\widetilde{\mathcal{K}}$, удовлетворяющим свойствам

1) $\widetilde{\mathcal{K}}(\tau+2\pi,u+2\pi)=\widetilde{\mathcal{K}}(\tau,u)\quad\forall\tau,u\in\mathbb{R}$,

2) $\widetilde{\kappa}(\tau)\in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},C)$ для всех $\tau\in\mathbb{R}$, где $(\widetilde{\kappa}(\tau))\,(u)=\widetilde{\mathcal{K}}(\tau,u)$, *3)* $\widetilde{\kappa} \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, C)$ *(функция* $\widetilde{\kappa}$ *непрерывна по норме пространства* $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, C)$*).*

В терминах наполненности данную теорему можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Подалгебры* $Gio_1 C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $Gio_\alpha C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $Gio_\gamma C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *наполненны в алгебре* $\operatorname{End} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Литература

[**1**] Баскаков А. Г., *Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц* // Матем. заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 10–21. [**2**] Струков В. Е., *О структуре оператора, обратного к интегральному оператору специального вида* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2 (1). — С. 22–30.

Спектр алгебры медленно меняющихся на бесконечности функций и банаховы пределы

И. И. Струкова (Воронежский государственный университет)

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Пусть $\mathbb{J}$ — один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Символом $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{J}} \|x(t)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b, $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство убывающих на бесконечности функций.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим полугруппу $S : \mathbb{J} \to \operatorname{End}\, C_{b,u}$ операторов, действующих по правилу $(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau)$, $t, \tau \in \mathbb{J}$. Отметим, что S — группа операторов, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(t)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$ для любого $t \in \mathbb{J}$.

Медленно меняющиеся на бесконечности функции рассматривались в [**1**, **2**].

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Оно образует линейное замкнутое подпространство банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ и является инвариантным относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{J}$. Если X — банахова алгебра, то $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ является банаховой алгеброй с операцией поточечного умножения $(xy)(t) = x(t)y(t)$, $t \in \mathbb{J}$. Она коммутативна, если коммутативна алгебра X, и является C^*-алгеброй, если X — C^*-алгебра. В частности, коммутативной C^*-алгеброй является алгебра $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, \mathbb{C})$.

Далее введем определение банахова предела на абстрактной C^*-алгебре. Пусть $\mathcal{U}$ — коммутативная C^*-алгебра. *Характер* ξ алгебры $\mathcal{U}$ — это такой ненулевой линейный функционал $\xi \in \mathcal{U}^*$, что $\xi(ab) = \xi(a)\xi(b)$ при всех $a, b \in \mathcal{U}$. *Спектром* алгебры $\mathcal{U}$ называется множество $\mathrm{Spec}\,\mathcal{U}$ всех ее характеров.

Рассмотрим коммутативную C^*-алгебру $\mathcal{U}$ с единицей e, на которой задано изометрическое представление $T : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}\,\mathcal{U}$, обладающее свойствами $\|T(t)\| = 1$ и $T(t)(xy) = (T(t)x)(T(t)y)$ для всех $x, y \in \mathcal{U}$, т. е. представление T образует полугруппу гомоморфизмов алгебры $\mathcal{U}$.

Определение 2. Линейный функционал B на инвариантной относительно полугруппы T алгебре $\mathcal{U}$ с единицей e называется *банаховым пределом* на $\mathcal{U}$, если выполнены условия:

1) $B(e) = 1$,
2) $\|B\| = 1$,
3) $B(T(t)x) = B(x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathcal{U}$.

Множество банаховых пределов алгебры $\mathcal{U}$ будем обозначать $\mathcal{BL}(\mathcal{U})$.

Символом $\mathbb{K}$ обозначим одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

В качестве коммутативной C^*-алгебры $\mathcal{U}$ возьмем алгебру $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$. Роль единицы в ней играет функция $e \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, $e(t) \equiv 1$, $t \geqslant 0$. В качестве представления T на алгебре $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ возьмем стандартную полугруппу сдвигов S.

Введем величины $\alpha_\infty(x)$, $\beta_\infty(x)$, $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Возьмем некоторое число $s > 0$. Замыкание множества значений функции $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ при $t \geqslant s$ заполняет некоторый отрезок, который мы обозначим через $[\alpha_x(s), \beta_x(s)]$, где $\alpha_x(s) = \inf\limits_{t \geqslant s} x(t)$, $\beta_x(s) = \sup\limits_{t \geqslant s} x(t)$. Тогда для любого $\tau > s$ справедливо включение $[\alpha_x(\tau), \beta_x(\tau)] \subseteq [\alpha_x(s), \beta_x(s)]$, т. е. функция $\alpha_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является неубывающей, а функция $\beta_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — невозрастающей. По данной функции $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ построим две следующие величины: $\alpha_\infty(x) = \lim\limits_{s \to \infty} \alpha_x(s)$, $\beta_\infty(x) = \lim\limits_{s \to \infty} \beta_x(s)$. Заметим, что $[\alpha_\infty(x); \beta_\infty(x)] = \bigcap\limits_{s > 0} [\alpha_x(s), \beta_x(s)]$, $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Будем говорить, что число $a \in \mathbb{K}$ принадлежит *множеству значений функции* $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ *на бесконечности*, если существует последовательность $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, такая, что $t_n \to \infty$, $n \to \infty$, и $\lim\limits_{n \to \infty} x(t_n) = a$. Множество значений функции x на бесконечности будем обозначать через $\mathrm{Im}_\infty(x)$. Отметим, что $\mathrm{Im}_\infty(x) = [\alpha_\infty(x), \beta_\infty(x)]$ для $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Замечание 1. Каждый банахов предел B на алгебре $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ обладает свойствами:

1) Условия 1) и 2) определения 2 эквивалентны условию $\alpha_\infty(x) \leqslant B(x) \leqslant \beta_\infty(x)$, $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

2) Банахов предел $\overline{B}$ на алгебре $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ определяется по следующему правилу: $\overline{B}(\varphi_1 + i\varphi_2) = B(\varphi_1) + iB(\varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, где B — банахов предел на $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

3) Если $B \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^*$, то условие 3) определения 2 эквивалентно условию $B \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^\perp$ (т. е. функционал B аннулируется на пространстве $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$).

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Каждый банахов предел на алгебре $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ является характером этой алгебры.*

Для каждого $\tau \geqslant 0$ рассмотрим функционал $\xi_\tau \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^*$, действующий по правилу $\xi_\tau(x) = x(\tau)$, $\tau \geqslant 0$. Далее для каждого $\tau \geqslant 0$ введем множества $A_\tau = \{\xi_t; t \in [\tau; +\infty)\}$. Введем обозначение $\mathcal{B}_0 = \bigcap\limits_{\tau \geqslant 0} \overline{A_\tau}$.

Лемма 1. *Справедливо равенство $\mathcal{B}_0 = \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}))$.*

Теорема 2. *Спектр алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ представи́м в виде $\mathcal{B}_0 \bigcup \{\xi_\tau; \tau \geqslant 0\}$.*

Литература

[**1**] Баскаков А. Г., Калужина Н. С., *Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений* // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 643–661. [**2**] Струкова И. И., *О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 28–38.

О методах исследования функции распределения собственных значений оператора Штурма-Лиувилля в пространстве вектор-функций

Я. Т. Султанаев (БГПИ им. Акмуллы, г. Уфа)

Исследованиям распределения собственных значений сингулярного оператора Штурма–Лиувилля посвящено значительное число работ, которые имеют более чем столетнюю историю. Впервые формула для функции распределения собственных значений была получена при весьма жестких ограничениях на потенциальную функцию. При этом, в основном, использовался либо метод осцилляционных теорем, либо метод тауберовых теорем, связанный с исследованием поведения резольвенты оператора. Б. М. Левитан усовершенствовал старые методы и создал новые, что позволило существенно ослабить условия на потенциальную функцию.

В докладе будет рассказано о новых результатах и методах исследования функции распределения собственных значений как скалярного оператора Штурма–Лиувилля, так и операторов любого порядка и операторов в пространстве вектор-функций.

Об одном классе сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями

А. Л. Тасевич (РУДН)

В двумерном круге рассматривается стационарное функционально-дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее в старшей части ортотропные сжатия аргументов неизвестной функции. Эта задача являются многомерным аналогом краевых задач, возникающих при исследовании уравнения пантографа и его обобщений. Последние имеют различные приложения, например, в технике, биологии, астрофизике.

Исследование разрешимости и спектральных свойств первой краевой задачи проводится на основе анализа неравенства Гординга. Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты уравнения, при которых оно будет сильно эллиптическим. Выполнение неравенства Гординга обеспечивает фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения. Также сильно эллиптический оператор удовлетворяет известной гипотезе Т. Като о квадратном корне из m-аккретивного оператора. Для дифференциально-разностных уравнений проблема нахождения алгебраического эквивалента неравенству Гординга была решена А. Л. Скубачевским, а для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями — Л. Е. Россовским.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00422).

Литература

[**1**] Като Т., *Теория возмущения линейных операторов.* М.: Мир, 1972. [**2**] Skubachevskii A. L., *The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations* // J. Diff. Equat. — 1986. — V. 63, № 3. — P. 332–361. [**3**] Россовский Л. Е., *Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений* // Мат. зам. — 1996. — Т. 59, № 1. — С. 103–113. [**4**] Россовский Л. Е., *Об одном классе секториальных функционально-дифференциальных операторов* // Дифф. ур. — 2012. — Т. 48, № 2. — С. 227–237.

Спектральные свойства оператора энергии двухэлектронных систем в примесной модели хаббарда в синглетном состоянии

С. М. Ташпулатов (ИЯФ АН РУз, Ташкент, Узбекистан)

Рассматривается двухэлектронная система в примесной модели Хаббарда в синглетном состоянии.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\gamma,\tau} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + \\ + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + \\ + (B_0 - B)\sum_{\gamma,\tau}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow},$$

где A (A_0) — энергия электрона в регулярном (примесном) узле решетки, B (B_0) — интеграл переноса электрона с регулярного (примесного) узла на соседние узлы (считаем, что $B > 0$), U (U_0) — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов на регулярном (примесном) узле, γ спиновый индекс ($\uparrow$ или $\downarrow$), $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ соответственно, оператор рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$, $\nu = 1, 2, ...,$ (через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены соответственно, значения спина $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$), τ — индекс суммирования по ближайшим соседям.

Исследованы спектральные свойства двухэлектронной системы в модели Хаббарда в синглетном состоянии. Показано, что существенный спектр рассматриваемой системы в синглетном состоянии состоит из объединения не более чем трех отрезков. Получены верхняя и нижняя оценка для количества трехчастичных связанных состояний системы.

Асимптотика решений рекуррентных соотношений высокого порядка с переменными коэффициентами.

Д. Н. Туляков (ИПМ им. М. В. Келдыша РАН)

В докладе обсуждаются слабая асимптотика полиномиальных решений $\{Q_{n,N}(z)\}$ четырёхчленных рекуррентных соотношений с коэффициентами, зависящими от спектрального параметра z и внешнего масштабного параметра N, а также свойства предельного распределения нулей таких полиномов. Важную роль играет матрица перехода, связывающая два соседних вектора из последовательных значений $(Q_{n+1}, Q_n, Q_{n-1})^T$ и $(Q_n, Q_{n-1}, Q_{n-2})^T$ (размерность векторов равна порядку рекуррентного соотношения). Приводится формула главного члена асимптотики $\{Q_{n,N}(z)\}$, когда n и N стремятся к бесконечности в таком режиме, что предельная матрица перехода $\widetilde{A}(z)$ зависит только от спектрального параметра (примером такого режима может служить случай степенно́й зависимости рекуррентных соотношений от n, и $n \to \infty$, $n/N \to \tau \in (0,1]$). В этом режиме характеристический полином $\widetilde{A}(z)$ связан с аналитической дугой предельного распределения нулей полиномов $\{Q_{n,N}(z)\}$, а наибольшее по модулю собственное значение описывает асимптотику отношения соседних полиномов. Также представлены несколько примеров применения к рекуррентным соотношениям для специальных систем совместно ортогональных многочленов. В заключение обсуждаются трудности получения результатов для высоких размерностей.

Основная задача. Пусть даны диагональные (“stepline”) рекуррентные соотношения для совместно ортогональных полиномов

$$\begin{cases} P_{n+1,n}(x) = (x - a_n^{(1)})\, P_{n,n}(x) + b_n^{(1)} P_{n,n-1} + c_n^{(1)} P_{n-1,n-1}, \\ P_{n+1,n+1}(x) = (x - a_n^{(2)})\, P_{n+1,n}(x) + b_n^{(2)} P_{n,n} + c_n^{(2)} P_{n,n-1} \end{cases}.$$

$\exists\, \varphi \;:\; \varphi(n) \uparrow \infty, \quad \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} \to 1$ такая, что

$$\frac{a_n^{(j)}}{\varphi(n)} \to \alpha_j\,, \quad \frac{b_n^{(j)}}{\varphi^2(n)} \to \beta_j\,, \quad \frac{c_n^{(j)}}{\varphi^3(n)} \to \gamma_j, \quad j = 1,2$$

и $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$. Матрицы

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \alpha_j & \beta_j & \gamma_j \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1,2.$$

Пусть $\{\lambda_j(t)\}_{j=1}^3$ собственные значения $A := A^{(2)}A^{(1)}$, модуль $\lambda_1(t)$ наибольший. Обозначим через Ω максимальную область, содержащую 0, что

$$t \in \Omega \Rightarrow |\lambda_1(t)| > |\lambda_j(t)|, \quad j = 2, 3,$$
$$F := \bigcup_{\theta \in [1,\infty)} \theta\,\Omega^c, \quad \Omega^c := \overline{\mathbb{C}} \backslash \Omega.$$

Основной результат.

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_{n,n}(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \varphi^2(k)} \right| = \int\limits_0^1 \ln \left| \lambda_1\left(\frac{\varphi(n\xi)}{x}\right) \right| d\xi + = o(1)$$

при $n \to \infty$, $\frac{\varphi(n)}{x} \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \backslash F$.

Результаты доклада основываются на совместной работе автора с А. И. Аптекаревым (препринт доступен по онлайн-адресу `http://library.keldysh.ru/preprint.asp?lg=e&id=2013-1`).

К обратимости линейного дифференциального оператора в пространстве Соболева–Слободецкого

В. М. Тюрин (Липецкий государственный педагогический университет)

Пусть X — банахово пространство; $L^p = L^p(R^n, X)$, $1 < p < \infty$, $n \in N$ — лебеговы пространства сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u : R^n \to X$ с обычной нормой $\|u\|_{10}$; $H^m = H^m(R^n, X)$ — пространство Соболева функций $u : R^n \to X$, норма в котором задается формулой

$$\|u\|_{1m} = \sum \|D^\alpha u\|_{10} (|\alpha| \leqslant m) < \infty, \quad m \in N;$$

в пространстве Соболева–Слободецкого $H^{m\gamma} = H^{m\gamma}(R^n, X)$ норма определяется равенством $\|u\|_{1m\gamma} = \|u\|_{1m} + \langle u \rangle_{1m\gamma}$, где

$$\langle u \rangle_{1m\gamma} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \left(\int\limits_{R^n \times R^n} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\gamma}}\, dxdy \right)^{1/p} < \infty (0 < \gamma < 1);$$

пространство, в котором норма вычисляется по формуле

$$\|u\|_{10\gamma} = \|u\|_{10} + \langle u \rangle_{10\gamma},$$

обозначим через $L^{p\gamma} = L^{p\gamma}(R^n, X)$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $P : H^{m\gamma} \to L^{p\gamma}$ в частных производных, действующий по формуле $Pu = \sum A_\alpha(x) D^\alpha u(x)$ $(|\alpha| \leqslant m)$ с коэффициентами $A_\alpha(x) \in C(R^n, \mathrm{End}\, X)$.

Предположим, что главная часть оператора P_m удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{1(m-1)\gamma} \leqslant a(\varepsilon)\|P_m u\|_{10\gamma} + b(\varepsilon)\|u\|_{10\gamma}$$

и оператор $P_m - \lambda : D(P_m - \lambda, L^{p\gamma})$ непрерывно обратим при $\mathrm{Re}\,\lambda < \lambda_0 \in R$. Постоянные $a(\varepsilon) > 0$, $b(\varepsilon) > 0$, причем $a(\varepsilon) \to 0$, если $\varepsilon \to 0$, $b(\varepsilon)$, вообще говоря, неограничена при $\varepsilon \to 0$.

Теорема. *Если оператор P удовлетворяет приведенным выше условиям, то при надлежащем выборе ε и $\mathrm{Re}\,\lambda < \lambda_0$ оператор $P - \lambda : H^{m\gamma} \to L^{p\gamma}$ будет непрерывно обратим.*

Приводится приложение доказанной теоремы.

О периодической цепочке Тоды с самосогласованным источником

Г. У. Уразбоев (Ургенчский государственный университет)
Б. А. Бабажанов (Ургенчский государственный университет)

Цепочка Тоды [**1**], описывающая динамику частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием в переменных Флашке [**2**], имеет вид

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \quad n \in Z. \end{cases}$$

В работах [**2**, **4**] показана интегрируемость цепочки Тоды методом обратной задачи рассеяния в быстроубывающем случае. Периодическая цепочка Тоды рассматривалась в работах [**5-9**]. В последнее время, в связи с различными физическими приложениями, большой интерес вызывают нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованными источниками. Интегрируемость уравнения КдФ с самосогласованным источником в классе “быстроубывающих” функций показана в работе [**10**], а для цепочки Тоды в работе [**11**].

В данной работе рассматривается N-периодическая цепочка Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \sum\limits_{i=1}^{2l+2} \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i, t)\big[(f_{n+1}^i)^2 - (f_n^i)^2\big], \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) - 2\sum\limits_{i=1}^{2l+2} \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i, t) f_n^i (a_n f_{n+1}^i - a_{n-1} f_{n-1}^i), \\ a_{n-1} f_{n-1}^i + b_n f_n^i + a_n f_{n+1}^i = \lambda i f_n^i, \\ a_{n+N} = a_n,\ b_{n+N} = b_n,\ (f_{n+N}^i)^2 = (f_n^i)^2,\ i = 1, 2, \ldots, 2l+2,\ n \in Z \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$a_n(0) = a_n^0, \ \ b_n(0) = b_n^0, \quad n \in Z, \tag{2}$$

с заданными N-периодическими последовательностями a_n^0, b_n^0, $n \in Z$. В системе (1) $a_n(t)$, $b_n(t)$, $f_n^i(t)$, $n \in Z$, $i = 1, 2, \ldots, 2l+2$ — неизвестные функции, причем функции $\{f_n^i(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ являются решениями Флоке–Блоха для уравнения Хилла

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \tag{3}$$

которые соответствуют простым собственным значениям λ_i, и нормированы условиями $f_1^i(t) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2l+2$. Собственные значения λ_i уравнения Хилла являются корнями уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$, где $\Delta(\lambda) = \theta_N(\lambda, t) + \varphi_{N+1}(\lambda, t)$, а $\theta_n(\lambda, t)$ и $\varphi_n(\lambda, t)$, $n \in Z$ решения уравнения (3) при начальных условиях $\theta_0(\lambda, t) = 1$, $\theta_1(\lambda, t) = 0$, $\varphi_0(\lambda, t) = 0$, $\varphi_1(\lambda, t) = 1$. Множители $\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t)$ в системе (1) определяются из равенства $\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) = \prod_{j=1}^{N-1}(\lambda - \mu_j(t))$, где $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, ..., $\mu_{N-1}(t)$ являются корнями уравнения $\theta_{N+1}(\lambda, t) = 0$.

Цель данной работы — получить представления для решений задачи (1)-(3), в рамках обратной спектральной задачи для уравнения Хилла (3).

Теорема. Если функции $a_n(t)$, $b_n(t)$, $f_n^i(t)$, $n \in Z$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ 2l+2$ являются решением задачи (1)-(3), то спектр оператора Хилла (3) не зависит от t, а спектральные параметры $\mu_j(t)$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\dot{\mu_j}(t) = 2\frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{2l+2}(\mu_j(t) - \lambda_k)}}{\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{l}(\mu_j(t) - \mu_k(t))}\left[1 - \sum_{i=1}^{2l+2}\frac{\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i, t)}{\lambda_i - \mu_j(t)}\right].$$

Замечание. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данные λ_i, $\mu_j(0)$, $\sigma_j(0)$ по заданным последовательностям $\{a_n^0\}$ и $\{b_n^0\}$. Затем, используя соотношение [**2**] между $\mu_j(0)$ и $\mu_{j,k}(0)$ определим $\mu_{j,k}(0)$, $\sigma_{j,k}(0)$. Применяя основную теорему вычислим $\mu_{j,k}(t)$, $\sigma_{j,k}(t)$. С учетом независимости от k собственных значений $\lambda_{i,k}$, используя формулы следов находим $a_k(t)$, $b_k(t)$ и следовательно $f_k^i(t)$.

Литература

[**1**] Toda M., *Waves in nonlinear lattice* // Suppl., Progress Theor. Physics. — 1970. — V. 45, P. 174–200. [**2**] Flaschka H., *On the Toda lattice* // II.-Progress Theor. Physics. — 1974. — V. 51, № 3. — P. 703–716. [**3**] Toda M., *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981. [**4**] Манаков С. В., *О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах* // Журн. эксп. и теорет. физики. — 1974. — Т. 67, № 2. — С. 543–555. [**5**] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия* // Успехи мат. наук. — 1976. — Т. 31, № 1. — С. 55-136. [**6**] Date E., Tanaka S., *Analog of inverse scattering theory for discrete Hill's equation and exact solutions for the periodic Toda lattice* // Progress Theor. Physics. — 1976. — V. 55, № 2. — P. 217–222. [**7**] Кричевер И. М., *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения* // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 4. — С. 215–216. [**8**] Самойленко В. Г., Прикарпатский А. К., *Периодическая задача для цепочки Тода* // Украинский мат. журнал. — 1982. — Т. 34, № 4. — С. 469–475. [**9**] Teschl G., *Jacobi Operators and Completely Integrable Lattices*, Mathematical Surveys and Monographs, V. 72, AMS, 2000. [**10**] Mel'nikov V. K., *Exact solutions of the Kortewed-de Vries equation with a self-consistent source* // Phys. Lett. A. — 1988. — V. 128. — P. 488–492. [**11**] Urazboev G. U., *Toda lattice with a special self-consistent source* // Theor. Math. Phys. — 2008. — V. 154. — P. 305–315.

Метод подбора для задачи определения параметров закрепления однородной струны

И. М. Утяшев (Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа)

Рассматривается задача идентификации условий закрепления однородной струны по двум собственным частотам ее колебаний. Идентификация закрепления сводиться к задаче поиска элементов матрицы краевых условий, составленной из коэффициентов граничных условий. На основе условия Плюккера, возникающего при восстановлении матрицы по ее минорам максимального порядка, построено множество корректности задачи. Показано, что матрицу краевых условий можно заменить на эквивалентную, выписанную через миноры максимально порядка. С помощью метода подбора найдено явное решение задачи с точностью до линейных перестановок ее концов.

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 14-01-00740–а, 14-01-97013–р_поволжье_а, 14-01-97010–р_поволжье_а.

Литература

[**1**] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач.* М.: Наука, 1974. [**2**] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П., *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* М.: Наука, 1978. [**3**] Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г., *Нелинейные некорректные задачи.* М.: Наука, 1995. [**4**] Лаврентьев М. М., *Теория операторов и некорректные задачи.* Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. [**5**] Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V., *Identification of boundary conditions using natural frequencies* // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2004. — V. 12, № 4. — P. 393–408. [**6**] Ахтямов А. М., *Теория идентификации краевых условий и ее приложения.* — М.: Физматлит, 2009.

Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций

У. А. Хоитметов (Ургенчский Государственный Университет)

В данной работе рассматривается система нелинейных уравнений

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_j^l\varphi_j^{m_j-1-l}\right), \tag{1}$$

$$L\varphi_j^l = k_j^2\varphi_j^l + l\varphi_j^{l-1}, \quad (\operatorname{Im} k_j > 0), \quad j=\overline{1,N}, \quad l=0,1,\ldots, \quad m_j-1, \tag{2}$$

где $C_n^l = \frac{n!}{(n-l)!\,l!}$, $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$, функции $\varphi_j^l(x,t)$ при любом неотрицательном t принадлежат пространству квадратично суммируемых функций $L_2(-\infty,\infty)$, а $\varphi_j^0(x,t)$ — собственная функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению $\lambda_j(t) = k_j^2(t)$, $(\operatorname{Im} k_j > 0)$ кратности $m_j(t)$, $j = 1,2,...,N$, $l = 0,1,\ldots,m_j-1$.

Система нелинейных уравнений (1)–(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \tag{3}$$

где начальная функция $u_0(x)$ является комплекснозначной и обладает свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|\, e^{\varepsilon|x|}dx < \infty, \tag{4}$$

2) оператор $L(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \ldots, m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_j-1-l)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_j^{m_j-1}(x,t)\varphi_j^{m_j-1-l}(x,t)\right)dx = A^l_{m_j-1-l}(t), \tag{5}$$

где $A^l_{m_j-1-l}(t)$ — изначально заданные непрерывные функции t, $j = 1, 2, \ldots, N$, $l = 0, 1, \ldots, m_j - 1$.

Пусть, функция $u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т. ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right| e^{\varepsilon|x|}\right)dx < \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3\,. \tag{6}$$

Основная цель данной работы — получить представления для решений $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $j = 1, 2, ..., N$, $l = 0, 1, \ldots, m_j - 1$ задачи (1)–(6) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Метод обратной задачи рассеяния ведет свое начало с работы [**1**], в которой он представлен как метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). В работе [**2**] Лакс указал на универсальность этого метода. В работах [**6**, **7**] с помощью метода обратной задачи рассеяния были проинтегрированы уравнения КдФ с самосогласованным источником в классе "быстроубывающих" функций. Отметим, что в нашей задаче оператор $L(t)$ является несамосопряженным, так как потенциал оператора $L(t)$ комплекснозначная функция. В работах [**12**, **13**] решена обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля с комплекснозначным потенциалом на всей прямой. Данные рассеяния несамосопряженного оператора $L(t)$ состоят из коэффициента отражения, собственных значений (с учетом кратности) и цепочки нормировочных чисел.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Если функции* $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $l = 0, 1, \ldots, m_j - 1$ *являются решениями задачи* (1)–(6)*, то данные рассеяния оператора* $L(t)$ *с потенциалом* $u(x,t)$ *меняются по* t *следующим* *образом*

$$S_t = 8i\lambda^{\frac{3}{2}} S, \left(|\mathrm{Im}\, k| < \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \lambda = k^2,$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad \frac{d\theta_0^n}{dt} = \left(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\right)\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_1^n}{dt} = \left(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\right)\theta_1^n + \left(12i\lambda_n^{\frac{1}{2}} + A_1^n(t)\right)\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_2^n}{dt} = \left(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\right)\theta_2^n + \left(12i\lambda_n^{\frac{1}{2}} + A_1^n(t)\right)\theta_1^n + \left(3i\lambda_n^{-\frac{1}{2}} + A_2^n(t)\right)\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_3^n}{dt} = \left(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\right)\theta_3^n + \left(12i\lambda_n^{\frac{1}{2}} + A_1^n(t)\right)\theta_2^n + $$

$$+ \left(3i\lambda_n^{-\frac{1}{2}} + A_2^n(t)\right)\theta_1^n + \left(-\frac{i}{2}\lambda_n^{-\frac{\{3}{2}} + A_3^n(t)\right)\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_p^n}{dt} = \left(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\right)\theta_p^n + \left(12i\lambda_n^{\frac{1}{2}} + A_1^n(t)\right)\theta_{p-1}^n +$$

$$+ \left(3i\lambda_n^{-\frac{1}{2}} + A_2^n(t)\right)\theta_{p-2}^n + \left(-\frac{i}{2}\lambda_n^{-\frac{3}{2}} + A_3^n(t)\right)\theta_{p-3}^n +$$

$$+ \sum_{r=4}^{p}\left(\frac{24i(-1)^r}{2^{r+1}}\frac{(2r-5)!}{r!(r-3)!}\lambda_n^{-\frac{(2r-3)}{2}} + A_r^n(t)\right)\theta_{p-r}^n,$$

где $n = 1, 2, \ldots, N$, $p = 4, 5, \ldots, m_n - 1$.

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(6).

Литература

[**1**] G. S. Gardner, I. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg–de Vries equation* // Phys.Rev. Lett. — 1967. — V. 19. — P. 1095–1097. [**2**] P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* // Communs Pure and Appl. Math. — 1968. — V. 21. — P. 467–490. [**3**] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах* // ЖЭТФ. — 1971. — V. 61. — P. 118–134. [**4**] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems* // Stud.Appl. Math. — 1974. — V. 53. — P. 249–315. [**5**] А. Ньюэлл, *Обратное преобразование рассеяния* / В сб.: Солитоны. Ред. Буллаф Р., Кодри Ф. М.: Мир, 1988. [**6**] В. К. Мельников, *Метод интегрирования уравнения Кортевега-де Вриса с самосогласованным источником* // Препринт. Дубна, 1988. [**7**] J. Leon, A. Latifi, *Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves* // J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — V. 23, P. 1385–1403. [**8**] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М.: Наука, 1986.

[**9**] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* М: Мир, 1988. [**10**] Karpman V. I., *Solution evaluations in the presence of perturbation* // Phys. Scr. — 1979. — V. 20. — P. 462–478. [**11**] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи.* М.: Мир, 1987. [**12**] Блащак В. А., *Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. I* // Дифф. ур-я. — 1968. — Т. 4, № 8. — С. 1519–1533. [**13**] Блащак В. А., *Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. II* // Дифф. ур-я. — 1968. — Т. 4, № 10. — С. 1915–1924.

Об одном модифицированном уравнении Орра–Зоммерфельда

В. П. Чистяков (Мех-мат МГУ)

В работе рассматривается задача Орра–Зоммерфельда для одномерного вязкопластического сдвига:

$$\left\{\begin{array}{c} (-\dfrac{d^2}{dx^2}+a^2)^2 w(x) + iaR[V_0(x)(-\dfrac{d^2}{dx^2}+a^2)w(x) + \\ + V_0''(x)w(x)] - 4\varkappa a^2 \left(\frac{w'(x)}{|V_0'(x)|}\right)' = \lambda(-\dfrac{d^2}{dx^2}+a^2)w(x), \\ w(0)=w'(0)=0, \\ w'(\xi)=0, \\ w''(\xi)+a^2 w(\xi) - \frac{iaRw(\xi)V_0''(\xi)}{iaRV_0(\xi)-\lambda} = 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Здесь a — волновое число, λ — спектральный параметр, функция $V(x)$ — профиль скоростей невозмущенного течения жидкости в канале $|x| \leqslant \xi$, предполагается гладкой. Более подробная информация об этой спектральной задаче имеется в книге [**1**].

Обозначим через $W^2_{2,U}$ подпространство функций соболевского пространства $W^2_2(0,\xi)$, удовлетворяющих первым трем краевым условиям (которые не зависят от λ). Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Собственные и присоединенные функции указанной задачи образуют базис Рисса в пространстве $W^2_2(0,\xi)$.*

В доказательстве теоремы существенно используются результаты работ [**2**] и [**3**].

Литература

[**1**] Георгиевский Д. В., *Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел.* М.: УРСС, 1998. [**2**] Шкаликов А. А., *О базисности системы собствен-*

ных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. — 1982. — № 6. [**3**] Гомилко А. М., Радзиевский Г. В., *Эквивалентность в $L_p[0,1]$ системы $e^{i2\pi kx}$ $(k=0,\pm1,\dots)$ и системы собственных функций обыкновенного функционально-дифференциального оператора* // Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 1. — С. 47–55.

О теореме единственности Левинсона

А. Ш. Шалданбаев (ЮКГУ им. М. Ауезова, г. Шымкент, Казахстан)
И. О. Оразов (ЮКГУ им. М. Ауезова, г. Шымкент, Казахстан)
М. Т. Шоманбаева (ЮКГУ им. М. Ауезова, г. Шымкент, Казахстан)

Ряд работ Б. М. Левитана [**1**, **2**] посвящен восстановлению оператора Штурма–Лиувилля по одному и двум спектрам. Теоремы единственности по двум спектрам были доказаны Боргом [**3**] и Чудовым [**4**]. Теоремы единственности по одному спектру были доказаны Амбарцумяном [**5**] и Левинсоном [**6**]. Данная работа обобщает работы двух последних авторов и результат выводится из теоремы Чудова с учетом внутренней симметрии оператора.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ оператор Штурма–Лиувилля с вещественным потенциалом $q(x)$.

$$Ly=-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \qquad x\in(0,1) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_{11}y(0)+a_{12}y'(0)+a_{13}y(1)+a_{14}y'(1)=0,\\ a_{21}y(0)+a_{22}y'(0)+a_{23}y(1)+a_{24}y'(1)=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $a_{i,j}(i=1,2;j=1,2,3,4)$ — произвольные комплексные постоянные и λ — спектральный параметр; через $\Delta_{i,j}$ $(i,j=1,2,3,4)$ обозначим миноры граничной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Пусть и Q — проекторы, определенные формулами

$$Pu(x)=\frac{u(x)+u(1-x)}{2}, \quad Qu(x)=\frac{u(x)-u(1-x)}{2}, \quad \forall u(x)\in L^2(0,1);$$

L^* — оператор, сопряженный к оператору (1)–(2).

Теорема. *Если имеют место равенства*

$$PL=L^*P, \quad LQ=QL^*, \quad \Delta_{12}=\frac{\Delta_{32}-\Delta_{14}}{2},$$

то оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) *восстанавливается по одному спектру.*

Литература

[**1**] Левитан Б. М., *Об определении оператора Штурма–Лиувилля по двум спектрам* // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т. 28. — С. 63-78. [**2**] Левитан Б. М., *Об определении оператора Штурма–Лиувилля по одному и двум спектрам* // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1978. — Т. 42, № 1. [**3**] Borg G., *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe* // Acta Mathematica. — 1945. — B. 78, № 2. — S. 1–96. [**4**] Чудов Л. А., *Обратная задача Штурма–Лиувилля* // Матем. сб. — 1949. — Т. 25 (67), № 3. — С. 451–456. [**5**] Ambartsumian V. A., *Uber eine Frage der Eigenwerttheorie* // Zeitschrift fur Physik. — 1929. — B. 53. — S. 690–695. [**6**] Levinson N., *The inverse Sturm–Liouville problem* // Math. Tidsskr. — 1949. — V. 13. — P. 25–30.

Спиновая динамика как результат супераналога qp-квантования

Н. Н. Шамаров (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Получен оператор Паули $\widehat{H^*}$ [**1**] для электрона в слабом постоянном магнитном поле с помощью супераналога qp-квантования подходящей функции Гамильтона, определенной на части суперпространства (см. [**2**–**6**]), порожденного классическим фазовым пространством.

Операторы Шредингера в широком смысле, включая $\widehat{H^*}$, называют также гамильтонианами квантовой системы, что и отражается традиционной буквой «H» в обозначении $\widehat{H}$, тогда как “крышка” над этой буквой означает, что, как правило, оператор Шредингера получают из некоторой функции Гамильтона H классической механической системы в виде псевдодифференциального оператора (ПДО) с символом H. Переход от функции Гамильтона к соответствующему гамильтониану называют также квантованием, а в случае, когда $\widehat{H}$ является ПДО с qp-символом H — соответственно, qp-квантованием.

В случае же оператора Паули до сих пор не был известен способ получения этого оператора с помощью qp-квантования классической функции Гамильтона, аргументы которой называют каноническими фазовыми переменными. В статье Березина и Маринова [**7**] высказана идея о том, что при описании динамики спина как результата квантования классической гамильтоновой системы нужно использовать антикоммутирующие аналоги канонических переменных. Теория функций обычных и антикоммутирующих переменных называется суперанализом [**4**].

Следует отметить, однако, что в статье [**7**] оператор Паули не получен описанным способом.

Далее $A = A_{\bar{0}} + A_{\bar{1}}$ — вещественная ассоциативная супералгебра с единицей 1 и не менее чем трехмерным над $\mathbb{R}$ нечетным подпространством $A_{\bar{1}}$.

Теорема 1. *Преобразование Фурье канонического монома*

$$M_{d_1,d_2,d_3,g}(q,\xi) = \xi_1^{d_1}\xi_2^{d_2}\xi_3^{d_3} \cdot g(q)$$

($g \in S(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, $d_j \in \{0, 1\}$) есть "взаимный" к нему канонический моном

$$M_{1-d_1,1-d_2,1-d_3,a,\hat{g}}(p,\eta) = \eta_1^{1-d_1}\eta_2^{1-d_2}\eta_3^{1-d_3} \cdot \hat{g}(p),$$

где $\hat{g}(p) = \iiint dq_1 dq_2 dq_3\, e^{-2\pi i\, p\cdot q} g(q)$.

Следствие. *Преобразованием Фурье канонического монома, умноженного слева на нечетный аргумент, является продифференцированный (слева) по соответствующему сопряжённому аргументу результат преобразования Фурье исходного монома с точностью до знака.*

Для получения оператора Паули для динамики электрона в постоянном магнитном поле обозначим, следуя Фоку [**1**], через H_0 вещественную часть функции Гамильтона, зависящую только от координат и импульсов: $H_0(q,p) = \frac{p^2}{2m} + U(q) + \frac{e}{2mc} B\cdot(q\times p)$, где $U(q) \equiv -e\mathcal{A}_0(q)$ — потенциальная энергия электрона в электрическом потенциале $\mathcal{A}_0$ (предполагаем, что $\mathcal{A}_0 \in S(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$), $B \in \mathbb{R}^3$ — постоянный вектор напряженности магнитного поля, $q \times p$ — векторное произведение элементов $p, q \in \mathbb{R}^3$. Полную же функцию Гамильтона $H(q,p,\xi,\eta) = H_0(q,p) + H_1(\xi,\eta)$ получим, определив функцию H_1 (зависящую только от нечетных фазовых переменных) формулой $H_1(\xi,\eta) = \frac{e\hbar}{2mc}\sum_{j=1}^{3}(\xi_k + \eta_k)B_k$.

Теорема 2. *Операторы* $\widehat{s}_k$, *где* $s_k(\xi,\eta) = -\xi_k + \eta_k$ *($k = 1, 2, 3$), удовлетворяют антикоммутационным соотношениям*

$$[\hat{s}_k, \hat{s}_\ell]_+ = 2\delta_{k,\ell}. \tag{1}$$

Для доказательства достаточно применить антикоммутаторы к мономам.

Поскольку неприводимое представление соотношений (1), связывающих операторы $\widehat{s}_k$, реализуется матрицами Паули, естественно заменить эти операторы в выражении $\widehat{H}_1 = \frac{e\hbar}{2mc}\sum_{j=1}^{3} B_k\widehat{s}_k$ матрицами Паули.

Теорема 3. *Если заменить операторы $\widehat{s}_k$ в выражении для оператора $\widehat{H}_1 = \frac{e\not{h}}{2mc}\sum_{j=1}^{3} B_k\widehat{s}_k$ матрицами Паули σ_k, то псевдодифференциальный оператор $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_1$ станет оператором Паули $\widehat{H^*}$ для электрона в постоянном магнитном поле* [**1**, формула (4) § 7 части III, С. 263]*:*

$$\widehat{H^*} = \frac{-\Delta}{2m} - e\mathcal{A}_0 + \frac{e}{2mc}\sum_{k=1}^{3} B_k\cdot(M_k + \not{h}\sigma_k),$$

где $M_1 = \widehat{q}_2\widehat{p}_3 - \widehat{q}_3\widehat{p}_2$, $M_2 = \widehat{q}_3\widehat{p}_1 - \widehat{q}_1\widehat{p}_3$ и $M_3 = \widehat{q}_1\widehat{p}_2 - \widehat{q}_2\widehat{p}_1$ — операторы компонент орбитального момента электрона.

Литература

[**1**] В. А. Фок, *Начала квантовой механики.* М., 1976. [**2**] A. Rogers, *A global theory of supermanifolds* // J. Math. Phys. — 1980. — V. 21. — P. 1352–1365. [**3**] B. DeWitt, *Supermanifolds.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. CUP, Cambridge, 2nd edition, 1992. [**4**] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление* // ТМФ. — 1984. — Т. 59, № 1. — Р. 3–27. [**5**] J. Kupsch, O. G. Smolyanov, *Functional representations for Fock superalgebras* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 1998. — V. 1, № 2. — P. 285–324. [**6**] А. Ю. Хренников, *Суперанализ.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. [**7**] Ф. А. Березин, М. С. Маринов, *Классический спин и алгебра Грассмана* // Письма в ЖЭТФ. — Т. 21, № 11. — С. 678–680.

О единственности решения задачи Коши для вырожденного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова со скалярным вырождением

С. В. Шапошников (МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет)

Рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t u = \Delta(\varrho u) - \operatorname{div}(\sqrt{\varrho}bu), \quad u|_{t=0} = 0.$$

Будем предполагать, что $b(x,t) = (b^i(x,t))_{1\le i\le d}$ — ограниченное борелевское векторное поле и $\varrho(x,t)$ — неотрицательная борелевская функция на $\mathbb{R}^d\times[0,T]$. Ограниченность или какая-либо регулярность функции ϱ не предполагается. Мы исследуем единственность в классе функций u таких, что $u\in L^2(\mathbb{R}^d\times[\kappa,T])$ и $\varrho u\in L^2(U\times[\kappa,T])$ для всякого

$\kappa > 0$ и всякого шара $U \subset \mathbb{R}^d$. Уравнение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\varrho\Delta\varphi + \sqrt{\varrho}\langle b, \nabla\varphi\rangle\Big] u\, dx\, dt = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,T)).$$

Решение удовлетворяет начальному условию $u|_{t=0} = 0$, если $(I-\Delta)^{-1}u(x,t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ для почти всех $t \in (0,T)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,1/n)} \|(I-\Delta)^{-1}u(\,\cdot\,,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,1/n)} \|(I-\Delta)^{-1/2}u(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Теорема. *Задача Коши имеет единственное решение $u = 0$ в классе таких решений u, что для всякого $\kappa > 0$ выполняются следующие условия: $u \in L^2(\mathbb{R}^d \times [\kappa, T])$, $\varrho u \in L^2(U \times [\kappa, T])$ для всякого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ и*

$$\lim_{N\to\infty} \int_\kappa^T \int_{N\le|x|\le 2N} \left(\frac{(\sqrt{\varrho} + \varrho)|u|}{1+|x|} + \frac{\varrho^2 u^2}{1+|x|^2} \right) dx\, dt = 0.$$

Доказательство теоремы основано на аппроксимативном методе Гольмгрена и подробно изложено в [**1**].

Литература

[**1**] Bogachev V. I., Roeckner M., Shaposhnikov S. V., *On uniqueness of solutions to the cauchy problem for degenerate Fokker–Planck–Kolmogorov equations* // Journal of Evolution Equations. — 2013. — V. 13, № 3. — P. 577-593.

О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий

Т. Ф. Шарапов (Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы)

Рассматривается скалярный эллиптический оператор второго порядка в многомерной области с частой сменой краевых условий. Область может быть как ограниченной, так и неограниченной. На границе области выделяется набор подмножеств, на которых задается граничное условие Дирихле, на оставшейся части границы ставится третье краевое условие. Исследуется поведение решений таких краевых задач, когда число частей выделенного подмножества границы неограниченно растет, а мера каждой отдельной части и расстояние между соседними частями стремится к нулю. Возможны также постановки задач, в которых описанная смена краевых условий задается не на всей границе, а лишь на фиксированной ее части, в то время как на остальной части границы в первом случае задается одно граничное условие Дирихле, а во втором — третье краевое условие. Рассматриваются два случая. В первом — усредненный оператор содержит краевое условие Дирихле, а во втором — третье краевое условие. Основной полученный результат — равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному и оценки скорости сходимости.

Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора с весом, порожденным функцией Минковского

И. А. Шейпак (Мех-мат МГУ)

Изучается асимптотическое поведение собственных значений задачи

$$-y'' = \lambda \rho y,$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

где ρ является обобщённой производной функции Минковского, известной в теории функций как функция «знак вопроса» $?(x)$, т. е. $\rho = ?'(x)$ (в смысле распределений).

Показано, что спектр задачи дискретен, все собственные значения просты и положительны. Для пронумерованных в порядке возрастания собственных значений справедливы оценки

$$\exists\, c_1, c_2 > 0 : \quad c_1 n^{\frac{d_H+1}{d_H}} \leqslant \lambda_n \leqslant c_2 n^{\frac{d_H+1}{d_H}}, \quad n \to \infty.$$

Здесь d_H — хаусдорфова размерность носителя меры, порожденной функцией $?(x)$, при этом $d_H = 2\int_0^1 \log_2(1+x)\, d?(x)$.

Работа поддержана грантами РФФИ № 13-01-00705 и № 13-01-12476.

Усредненные модели гетерогенных сред и их спектральные свойства

А. С. Шамаев (Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН)

В. В. Шумилова (Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН)

Рассматриваются математические модели, описывающие колебания двухфазных гетерогенных сред с ε-периодической микроструктурой.

Предполагается, что первой фазой гетерогенной среды является вязкоупругий материал с мгновенной или долговременной памятью, а второй — либо упругий материал, либо вязкая жидкость. Устанавливается, что при $\varepsilon \to 0$ предельное поведение рассмотренных сред совпадает с поведением сплошных вязкоупругих материалов с долговременной памятью.

С помощью приведенных усредненных моделей исследуются также спектральные свойства гетерогенных слоистых сред. Доказывается, что при определенных условиях спектральные свойства компонентов гетерогенной среды качественно отличаются от спектральных свойств ее усредненной модели.

Обратная задача для дифференциальных операторов на пространственных сетях с разными порядками на разных ребрах

В. А. Юрко (Саратовский Университет)

Рассмотрим компактный звездообразный граф T в $\mathbf{R}^\omega$ с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_p\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_p\}$, где $v_1, \dots, v_p$ — граничные вершины, v_0 — внутренняя вершина и $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,p}$, $\bigcap_{j=1}^{p} e_j = \{v_0\}$. Пусть l_j — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что $x_j = 0$ соответствуют граничным вершинам $v_1, \dots, v_p$. Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,p}}$, где функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j. Зафиксируем $m = \overline{1,p}$. Пусть n_i, p_i, $i = \overline{1,m}$ — натуральные числа, $n_1 > n_2 > \ldots > n_m > 1$, $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{m-1} < p_m := p$, $n_{m+1} := 1$, $p_0 := 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T:

$$\begin{cases} y_j^{(n_i)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{n_i-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \\ \quad x_j \in (0, l_j), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}, \end{cases}$$

где $q_{\mu j}(x_j)$ — комплекснозначные интегрируемые функции. Итак, дифференциальное уравнение имеет порядок n_i на ребрах e_j, $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. Будем называть $q_j = \{q_{\mu j}\}$ потенциалом на ребре e_j, а $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,p}}$ — потенциалом на графе T.

Пусть $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1,p}$ — матрица Вейля относительно граничной вершины v_s (см. [**1**]). Зафиксируем $N = \overline{1,m}$.

Обратная задача 1. Даны $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1,p} \setminus p_N$, построить q на T.

Теорема 1. *Задание матриц Вейля $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1,p} \setminus p_N$ однозначно определяет потенциал q на T.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [**2**] и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

Литература

[**1**] Yurko V. A. *Spectral analysis for differential operators of variable orders on star-type graphs: general case* // Schriftenreiche des Fachbereichs Mathematik, SM-DUE-774, Universitat Duisburg-Essen, 2014, 12 pp. [**2**] Юрко В. А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит, 2007.

Интегрирование нелинейной системы Шредингера высшего порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций

А. Б. Яхшимуратов (Ургенчский государственный университет)

Одним из представителей класса вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющих большое прикладное значение, является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи, в классе быстроубывающих функций, впервые была установлена в работе [**1**]. Исследованию НУШ в классах периодических или же конечнозонных функций посвящено многочисленное количество работ (см. [**2**]). Следует отметить, что НУШ с самосогласованным источником, в классе быстроубывающих функций, было рассмотрено в работах [**3**, **4**], а в классе периодических функций в работе [**2**].

В этой работе мы рассмотрим следующую нелинейную систему Шредингера высшего порядка с самосогласованным источником

$$\begin{cases} p_t = b'_N + 2qc_N - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)d\lambda, \\ q_t = -a'_N - 2pc_N + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi 2^+\psi_2^-)d\lambda, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_N = a_N(x,t)$, $b_N = b_N(x,t)$ и $c_N = c_N(x,t)$ выражаются через $p = p(x,t)$ и $q = q(x,t)$ следующим образом: по заданным непрерывным функциям $a_0(x,t) = 0$, $b_0(x,t) = 0$ и $d_k = d_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, N$ строим последовательности функций

$$\begin{gathered} c_k = -2\int\limits_0^x [p(s,t)a_k(s,t) + q(s,t)b_k(s,t)]ds + d_k, \\ a_{k+1} = \tfrac{1}{2}b'_k + qc_k, \quad b_{k+1} = -\tfrac{1}{2}a'_k - pc_k. \end{gathered} \tag{2}$$

Система (1) рассматривается с начальными условиями

$$p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x) \tag{3}$$

в классе вещественнозначных π-периодических по x функций:

$$p(x+\pi,t) \equiv p(x,t), \quad q(x+\pi,t) \equiv q(x,t),$$

удовлетворяющих условиям гладкости

$$p(x,t),\ q(x,t) \in C_x^N(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0),$$

где $p_0(x)$, $q_0(x) \in C^N(R)$ заданные действительные функции.

Здесь $\beta(\lambda,t)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t) = O(\lambda^{-2})$, $\lambda \to \pm\infty$, $\psi^{\pm} = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\ \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$= \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in R. \tag{6}$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t),\ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = (0,\ 1)^T$.

Цель данной работы дать процедуру построения решения (p, q, ψ^+, ψ^-) задачи (1)–(5), в рамках обратной спектральной задачи для уравнения Дирака (5). Спектр оператора (5) имеет вид $E = \bigcup\limits_{n \in Z} [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n \in Z$ задачи Дирихле ($y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$) вместе со знаками $\sigma_n(t) = \operatorname{sign}\{s_2(\pi,\xi_n(t),t) - 1/s_2(\pi,\xi_n(t),t)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами оператора (5).

Теорема. *Пусть (p, q, ψ^+, ψ^-) является решением задачи* (1)–(5). *Тогда спектр оператора Дирака с коэффициентами $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$ не зависит от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина.*

Применяя результаты работ [**5**, **6**] получаем следующие важные следствия.

Следствие 1. *Если число $\pi/2$ является периодом для начальных функций $p_0(x)$ и $q_0(x)$ задачи* (1)–(5), *то число $\pi/2$ является также периодом и для решения $p(x,t)$ и $q(x,t)$ по переменной x.*

Следствие 2. *Если в задаче* (1)–(5) *начальные функции* $p_0(x)$ *и* $q_0(x)$ *являются действительными аналитическими функциями, то* $p(x,t)$ *и* $q(x,t)$ *также являются действительными аналитическими функциями по* x.

Литература

[**1**] Захаров В. Е., Шабат А. Б., *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах* // ЖЭТФ. — 1971. — Т. 61, № 1. — С. 118–134. [**2**] Yakhshimuratov A., *The Nonlinear Schrödinger Equation with a Self-consistent Source in the Class of Periodic Functions* // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. — 2011. — V. 14, № 2. — P. 153–169. [**3**] Mel'nikov V. K., *Integration of the nonlinear Schrödinger equation with a self-consistent source* // Commun. Math. Phys. — 1991. — V. 137. — P. 359–381. [**4**] Shao Y., Zeng Y., *The solutions of the NLS equations with self-consistent sources* // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — V. 38. — P. 2441–2467. [**5**] Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б., *Аналог обратной теоремы Г. Борга для оператора Дирака* // УзМЖ. — 2000. — № 3. — С. 40–46. [**6**] Хасанов А. Б., Ибрагимов А. М., *Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом* // УзМЖ. — 2001. — № 3–4. — С. 48–55.

Авторский указатель

Научное издание

Международная конференция, посвященная 100-летию Б. М. Левитана

Москва, 23–27 июня 2014 г.

Тезисы докладов

Компьютерная верстка и подготовка оригинал-макета:
А. А. Владимиров.

Отпечатано в типографии ЗАО «Новые печатные технологии»
Тел.: +7 (495) 223-92-00
info@web2book.ru <mailto:info@web2book.ru>, www.web2book.ru